Catalogue des cours sélectionnés

1 : MAT570 Enseignement d'approfondissement
2 : MAT501 Mathématique: programme Approfondissement - période 1
3 : MAT552 Théorie algébrique des nombres
4 : MAT572 Théorie algébrique des nombres

MAT570 Enseignement d'approfondissement

Enseignement d'approfondissement : en relation avec un des cours suivis et sous la direction de l'enseignant concerné, l'élève effectue un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Sujets proposés :

- MAT551 (Systèmes dynamiques) : Les sujets seront choisis après discussion et donneront lieu à un bref cours introductif. Voici quelques sujets proposés ou traités les années précédentes:

1. Stabilité des dynamiques hyperboliques et exemples de systèmes robustement instables
2. Orbites homoclines et comportement chaotique en mécanique classique
3. Théorème de Furstenberg: preuve ergodique du théorème combinatoire de Szemerédi
4. Théorème KAM et diffusion d'Arnold: stabilité et instabilité dans les systèmes hamiltoniens
5. Actions de groupes sur le cercle
6. Périodicité et explosions dans les billards
7. Théorème de Ratner pour SL(3,Z) et applications en théorie des nombres
8. Théorème d'Elkies-McMullen: dynamique des réseaux plans et répartition de n1/2 mod 1
9. Dynamique chaotique et évolution d'espaces-temps de Bianchi

Toutes les propositions ayant un composant mathématique significatif, notamment en lien avec d'autres cours (par exemple: théorie du contrôle, probabilités, mécanique,..), sont les bienvenues.
La structure de ces enseignement est souple, le travail personnel sur documents jouant un rôle prépondérant. L'évaluation portera sur la rédaction d'un mémoire détaillé et une soutenance orale permettant de faire la preuve de son esprit synthétique comme de sa capacité à répondre à des questions précises.

- MAT552 (Théorie algébrique des nombres) : Des approfondissements en liaison avec le module seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

- MAT553 (Topologie différentielle I): Exemple de thèmes qui pourraient être traités : Théorie du cobordisme de Thom et classes caractéristiques des espaces fibrés - qui pourraient nous permettre d'exhiber la célèbre "sphère exotique de Milnor", variété de dimension 7, homéomorphe à la sphère standard mais pas difféomorphe.

- MAT554 (Analyse nonlinéaire) : Des approfondissements prolongeant le cours de MAT554 pourront être :
- Propriétés dispersives de l'équation des ondes et de Schrödinger
- Equation de l'équation de Schrödinger cubique
- Etude des poches de tourbillons et théorème de J.-Y. Chemin
- Régularité des trajectoires des particules pour les fluides incompressibles
- Espaces de Besov et théorèmes de type Kato pour les équations de Navier-Stokes
- L'équation d'Euler incompressible
- Fluides faiblement compressibles.
- Fluides en rotation rapide.
- Équation de Navier-Stokes à viscosité petite ; équations de Prandtl et couches limites.

- MAT556 (Groupes et représentations) : Des approfondissements prolongeant le cours de MAT556 pourront être :
- Poids et racines, représentations des groupes de Lie compacts
- Applications de la théorie des groupes et algèbres de Lie aux systèmes intégrables, réseaux de Toda
- Diagrammes de Young, représentations des groupes symétriques, principes de Pauli
- Algèbres de Kac-Moody
- Introduction aux groupes quantiques
- Symétries cachées de l'atome d'hydrogène
- Fullerènes et théorie des groupes

Période : Automne
Dernière mise à jour : mardi 10 juillet 2012

MAT501 Mathématique: programme Approfondissement - période 1

Les cours proposés dans le programme d'approfondissement de Mathématiques couvrent des domaines divers de l'analyse, de l'algèbre et de la géométrie. Avec leur mélange de théories fondamentales et d'applications d'une très grande actualité, ils constituent une formation qui sera hautement appréciée à la fois par ceux qui souhaitent une formation par la recherche au plus haut niveau, et par ceux qui veulent poursuivre une formation d'ingénieur dans le cadre d'une Ecole en convention avec l'École polytechnique. Elle est indispensable à ceux qui envisagent une carrière de recherche à fort contenu mathématique.
Les sujets des cours ont été choisis à la fois pour leur importance théorique, leur beauté et pour leur ouverture aux applications.

Règles de choix et de validation

Le Programme d'Approfondissement se compose de trois périodes :
- Période 1 (septembre-décembre) : enseignements fondamentaux
- Période 2 (janvier-mars) : enseignements fondamentaux
- Période 3 (avril-juillet) : stage de recherche :

Pour les périodes 1 et 2, les élèves doivent choisir au minimum 3 modules parmi ceux proposés. S'y ajoutent pour chacune des périodes, un module d'approfondissement consistant en un travail personnel en relation avec l'un des cours suivis, effectué sous la direction de l'enseignant concerné.

Certains modules sont proposés en collaboration avec d'autres départements :
• Physique : Equation de Schrödinger non linéaire : des condensats de Bose Einstein aux supersolides / Relativité générale / Groupes de symétrie en physique subatomique
• Mathématiques Appliquées : Analyse non linéaire / Transport et diffusion

Compatibilité avec les autres Parcours d'approfondissement du M1 de l'Ecole polytechnique.

- Mathématiques appliquées
Un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques pourra choisir un des modules parmi ceux offerts par le Département de Mathématiques appliquées et réciproquement, un élève s'inscrivant au Programme d'approfondissement de Mathématiques appliquées pourra choisir un des modules parmi ceux proposés ci-dessous.

- Autres parcours d'approfondissement
Le cas des élèves inscrits au Programme d'approfondissement de Mathématiques et désirant choisir un module dans une autre discipline pourra être examiné.

Offre de première période - P1

Cours Fondamentaux

MAT551 : Systèmes dynamiques (Jérôme Buzzi)
MAT552 : Théorie algébrique des nombre (Gaetan Chenevier)
MAT553 : Topologie différentielle (Andrei Moroianu)
MAT554 : Analyse non linéaire (Raphaël Danchin / Pierre Raphaël)
MAT556 : Groupes et représentations (A. Cadoret)

MAT570 Enseignement d'approfondissement en Mathématiques : en relation avec un des cours suivis et sous la direction de l'enseignant concerné, l'élève effectue un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

MAT/PHY575 Groupes de symétrie en physique subatomique (Denis Bernard, David Renard) : Des séances animées par les enseignants mathématiciens et physiciens exposent les principes théoriques de base. Les élèves effectuent parallèlement un travail personnel donnant lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Pré-requis :

Certains cours présupposent de maîtriser le contenu d'une ou deux des parties du cours de MAT431-Distributions, analyse de Fourier et systèmes dynamiques.
• Le cours de MAT551-Systèmes dynamiques suppose d'avoir maîtrisé le contenu de la partie Systèmes dynamiques du cours MAT 431

• Les cours de MAT554-Analyse non linéaire et MAT565-Théorème de Fermat, courbes elliptiques et formes modulaires supposent d'avoir maîtrisé la partie Distributions et Analyse de Fourier du cours de MAT 431

Période : Hiver & Printemps
Dernière mise à jour : mardi 10 juillet 2012

MAT552 Théorie algébrique des nombres

La théorie algébrique des nombres est l'étude des propriétés algébro-arithmétiques des nombres algébriques. On s'intéresse notamment à la propriété de factorialité, c'est à dire de "factorisation unique des éléments comme produits d'éléments premiers", dans les anneaux de la forme Z[x] où x est un "entier algébrique", comme par exemple Z[i] (entiers de Gauss), Z[2^{1/3}] etc... Cette question intervient de manière cruciale dans l'étude des équations diophantiennes, l'exemple historique le plus fameux étant l'approche de Kummer (et Fermat?) pour démontrer le "dernier théorème" de Fermat, mais aussi dans de nombreuses autres questions comme la théorie entière des formes quadratiques, la réduction des endomorphismes à coefficients entiers, la théorie de la multiplication complexe ... Il se trouve que la propriété de factorialité ne persiste en général qu'au sens des idéaux (Kummer, Dedekind), et que le défaut de factorialité peut être mesuré par un groupe abélien fini "le groupe des classes d'idéaux" dont les mystères sont encore au coeur de l'arithmétique moderne.

Le cas des "entiers quadratiques", c'est à dire de Z[x] avec x^2=d entier, est historiquement le plus important et sera étudié en détail. La théorie contient alors celle des formes quadratiques binaires entières (Lagrange, Legendre, Gauss). Par exemple, il est connu depuis Fermat que si p est un nombre premier avec p = 1 modulo 4, c'est a dire si -1 est un carré modulo p,
alors p est somme de deux carrés. Comment expliquer que si -5 est un carré modulo p, c'est a dire p = 1,3,7,9 modulo 20, alors p est exclusivement soit de la forme x^2 + 5 y^2, soit de la forme 2 x^2 + 2 xy + 3 y^2 (avec x,y entiers) ? (Euler, Lagrange). Nous obtiendrons de multiples énoncés de ce type. Cela nous conduira enfin à la notion de "genre" des formes
quadratiques (Lagrange, Gauss), point de départ de la fameuse théorie du corps de classes.

Quelques notions abordées : corps de nombres, entiers algébriques, anneau de Dedekind, groupe des classes d'idéaux, théorème des unités de Dirichlet, formes quadratiques binaires entières, formules du nombre de classes et du nombre de genre.

Période : Automne
Nombre d'heures : 36
Crédits ECTS : 4
Dernière mise à jour : mardi 02 octobre 2012

MAT572 Théorie algébrique des nombres

- MAT552 (Théorie algébrique des nombres) : Des approfondissements en liaison avec le module seront proposés. Leur structure sera souple, le travail personnel sur documents jouera un rôle prépondérant, éventuellement précédé de quelques cours d'introduction. Ils conduiront à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance orale.

Période : Automne
Nombre d'heures : 36

Crédits ECTS : 4
Dernière mise à jour : jeudi 18 avril 2013