L'endommagement et la Rupture : hier, aujourd'hui et demain [1]

Jean-Jacques MARIGO

LPMTM (UPR-CNRS 9001)
Institut Galilée, Université Paris 13
Avenue J.B. Clément
93430 Villetaneuse
E-mail : marigo@lpmtm.univ-paris13.fr

Résumé.

Le texte de cette conférence est une compilation d'un ensemble de travaux réalisés au sein du LPMTM à Villetaneuse par l'équipe de recherche *Endommagement et rupture des matériaux et des structures* dont en particulier G. FRANCFORT, F. BILTERYST et B. BOURDIN. Ils ont été publiés pour la plupart sous une forme un peu différente et généralement un peu plus synthétique. Ils sont le fruit d'une lente maturation d'une approche esquissée dans le papier [21] dans laquelle toute l'évolution de l'endommagement ou de la fissuration est régie par un principe de moindre énergie. Cette simple mais stricte application d'un principe par ailleurs largement cautionné par les physiciens suffit à pallier de graves lacunes des théories antérieures tout en permettant, à partir d'une seule et même formulation, d'expliquer ou de rendre compte de phénomènes exigeant jusqu'ici des modélisations complètement déconnectées. Évidemment, dans sa forme originelle, cette nouvelle approche présente elle aussi des défauts qu'il s'agira de gommer dans les futures versions. Mais il nous semble que la piste est intéressante à suivre.

1. IPSI :Comportements non linéaires des matériaux. Paris, 30 mars 2000

Table des matières

1 Étude d'une classe de modèles d'endommagement **1**
1.1 Objectifs de l'étude 2
1.2 Les modèles d'endommagement fragiles standards, non régularisés 2
1.2.1 Leur construction 2
1.2.2 Leurs propriétés énergétiques 4
1.2.3 Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité 9
1.3 Les modèles d'endommagement fragiles standards régularisés 13
1.3.1 Leur formulation 13
1.3.2 Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité 17
1.3.3 La convergence vers un modèle de rupture fragile 31

2 La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée **33**
2.1 Introduction 34
2.2 La nouvelle formulation 38
2.2.1 Définitions et Hypothèses 38
2.2.2 Loi d'évolution de la fissuration 43
2.3 Quelques solutions exactes 47
2.3.1 Milieu unidimensionnel 47
2.3.2 Traction simple sur un cylindre tridimensionnel 52
2.3.3 Arrachement d'une armature 55
2.4 Quelques propriétés 57
2.4.1 Initiation de la fissuration et rupture 58
2.4.2 Fissuration progressive, fissuration brutale et la théorie de Griffith 62
2.4.3 Fissuration progressive ou fissuration brutale ? 65
2.5 Perspectives et Conclusion 74
2.5.1 Les défauts à corriger 74
2.5.2 Les développements envisagés 76
2.5.3 Conclusion 77

3 Amorçage de la décohésion dans l'essai d'arrachement. **79**
3.1 Application de la théorie de Griffith étendue à la décohésion. 80
3.2 L'essai d'arrachement. 80
3.2.1 L'approximation poutre 1D 81

3.2.2 Amorçage et couches limites. 82
3.2.3 Détermination de la longueur d'amorçage. 83
3.3 Remarques finales 84

Chapitre 1

Étude d'une classe de modèles d'endommagement

Résumé.

Ce chapitre est consacré à l'examen de modèles d'endommagement "régularisés", *i.e.* ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement pondérés par un paramètre qualifié de longueur caractéristique. En partant d'une formulation du problème d'évolution basée sur un principe de minimisation d'énergie — principe dont on discutera le bien-fondé — le travail porte sur l'étude des propriétés mathématiques du problème ainsi formulé.

1.1 Objectifs de l'étude

Ce chapitre est consacré à l'examen de modèles d'endommagement "régularisés", *i.e.* ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement pondérés par un paramètre qualifié de longueur caractéristique. En partant d'une formulation du problème d'évolution basée sur un principe de minimisation d'énergie — principe dont on discutera le bien-fondé — le travail porte sur l'étude des propriétés mathématiques du problème ainsi formulé. Plus précisément, on se propose :

1. A longueur caractéristique fixé, d'établir de résultats d'existence et d'unicité de la solution dans un espace fonctionnel approprié.
2. Lorsque la longueur caractéristique est considérée comme un petit paramètre, d'établir de résultats de convergence du modèle d'endommagement non local vers un modèle de rupture.

La réponse au deuxième point se trouve pour l'essentiel dans la thèse de Blaise Bourdin, cf. [11] et ne sera donc pas développée ici. En particulier, le lecteur pourra y trouver des démonstrations mathématiques précises, mais trop longues pour être reproduites ici. Nous nous concentrerons donc uniquement sur le premier point tout en discutant longuement du bien-fondé et de l'efficacité de l'approche énergétique. Pour bien mettre en évidence les avantages, mais aussi les faiblesses résiduelles des modèles régularisés, nous commençons par rappeler (voire parfois à établir de façon précise) les principales propriétés associées aux modèles non régularisés.

Le plan du chapitre sera donc le suivant :

1. Dans la section 2, on commence par rappeler les principales propriétés des modèles d'endommagement fragiles non régularisés et en particulier ce qui motive l'introduction d'une longueur caractéristique dans les modèles. Ceci permet d'introduire de façon incontestable les principaux concepts qui serviront aussi pour l'analyse des modèles régularisés. L'accent est tout particulièrement mis sur la notion de stabilité des états, propriété qui s'avère décisive quant à l'évaluation de la pertinence d'un modèle.
2. Dans la section 3, on présente le modèle (il s'agit plus précisément d'une famille de modèles) d'endommagement régularisé étudié en partant d'une formulation de la loi d'évolution en terme d'extrema d'énergie. Puis on compare les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions obtenus sur ces modèles (soit dans un cadre général, soit à travers quelques exemples) avec ceux établis précédemment pour les modèles non régularisés.

1.2 Les modèles d'endommagement fragiles standards, non régularisés

1.2.1 Leur construction

Les principaux choix

Rappelons que la construction d'un modèle d'endommagement passe par le choix :

1. d'un paramètre d'endommagement,
2. de la dépendance de la relation contrainte-déformation vis-à-vis de ce paramètre,

3. de la loi d'évolution du paramètre.

L'objectif de l'étude n'étant pas de développer un modèle précis, applicable à un matériau précis, mais plutôt de faire une étude qualitative d'un modèle représentatif de cette famille de modèles d'endommagement fragiles standards, nous prenons le parti de faire les choix les plus simples tout en dégageant les propriétés génériques. Ainsi nous supposons que

1. l'endommagement peut être paramétré par un scalaire α croissant ;
2. à endommagement fixe, le matériau a un comportement élastique linéaire, mais sa rigidité dépend de son degré d'endommagement. Autrement dit le matériau a une élasticité variable caractérisée par la relation $\alpha \mapsto A(\alpha)$ entre le tenseur de rigidité [1] et le paramètre d'endommagement, fonction (évidemment) positive et décroissante ;
3. la loi d'évolution de l'endommagement est régie par une loi à seuil standard basée sur la notion de taux de restitution d'énergie critique (cf [Marigo, 1989] pour une justification de ce type de loi à partir du postulat de Drücker-Ilyushin). Autrement dit, la loi d'évolution s'écrit

$$-\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon\cdot\varepsilon \leq k, \qquad \dot{\alpha} = \begin{cases} 0 & si \quad -\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon\cdot\varepsilon < k \\ \geq 0 & si \quad -\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon\cdot\varepsilon = k \end{cases}, \tag{1.1}$$

où k, scalaire positif dépendant *a priori* de α, caractérise, pour un état d'endommagement donné, la taille du domaine d'élasticité dans l'espace des déformations, alors que A' désigne la dérivée de la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$.

Remarque 1. *Moyennant un changement du paramètre d'endommagement , on peut supposer que la fonction k est en fait une constante. En effet, en posant $\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha} k(a)/k(\alpha_0)\, da$ le critère d'endommagement s'écrit*

$$-\frac{1}{2}\frac{dA}{d\beta}(\beta)\varepsilon\cdot\varepsilon \leq k(\alpha_0).$$

On peut aussi remarquer que ce changement de paramétrage est unique à une translation et une homothétie près, i.e. *seuls les paramètres de la forme $a\beta + b$, avec $a > 0$ et b réel, conviennent.*

De ce fait, la construction d'un modèle d'endommagement fragile standard se résume en le choix
- des deux fonctions $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et $\alpha \mapsto k(\alpha)$, si l'on n'a pris aucune précaution.
- de la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et de la constante k, si l'on a fait le bon choix du paramètre α ;

Nous supposerons désormais que le paramètre d'endommagement a été convenablement choisi de façon à ce qu'il soit sans dimension physique, croissant depuis 0 et que k soit une constante ayant la dimension d'une pression correspondant à la contrainte de premier endommagement dans un essai de traction simple, ce qui fixe les constantes a et b.

Les propriétés d'écrouissage

Comme on le verra dans la sous-section 1.2.3, les phénomènes d'instabilité et de localisation sont intimement liés aux propriétés d'écrouissage des modèles, *i.e.* au fait que le domaine d'élasticité dans

1. Toutes les notions qui suivent sont valables en dimension $n, 1 \leq n \leq 3$. Certaines expressions se simplifient évidemment en dimension 1.

l'espace des contraintes croît ou non avec l'endommagement. Une fois le modèle normalisé, ces propriétés d'écrouissage sont elles-mêmes liées à des propriétés de convexité de la fonction d'élasticité $\alpha \mapsto A(\alpha)$. En effet, notons $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}^*(\alpha)$ les domaines d'élasticité dans l'espace respectivement des déformations et des contraintes. Ils s'écrivent

$$\mathcal{E}(\alpha) = \left\{ \varepsilon \mid -\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon \leq k \right\}, \qquad \mathcal{E}^*(\alpha) = \left\{ \sigma \mid \frac{1}{2}(A^{-1})'(\alpha)\sigma \cdot \sigma \leq k \right\} \tag{1.2}$$

où $A^{-1}(\alpha)$ désigne le tenseur de souplesse du matériau dans un état d'endommagement α. Il est alors facile de voir que $\mathcal{E}(\alpha)$ croît avec α — on parlera d'*écrouissage en déformation* — si et seulement si la *rigidité* est une fonction *convexe* (positive et décroissante) de l'endommagement , alors que $\mathcal{E}^*(\alpha)$ croît avec α — on parlera d'*écrouissage en contrainte* — si et seulement si la *souplesse* est une fonction *concave* (positive et croissante) de l'endommagement. Il est également facile de voir que ces deux propriétés ne sont pas équivalentes, mais que la deuxième (concavité de A^{-1}) implique la première (convexité de A) du fait de la positivité de A.

Un exemple

Un cas particulièrement simple est celui d'un matériau initialement élastique et isotrope qui s'endommage tout en restant isotrope et en conservant le même coefficient de Poisson. La dépendance de la rigidité par rapport au paramètre d'endommagement prend alors la forme :

$$A(\alpha) = a(\alpha)A_0, \qquad A_{0ijkl} = \lambda_0\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_0(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{1.3}$$

le module d'Young $E(\alpha)$ et le coefficient de Poisson $\nu(\alpha)$ du matériau endommagé étant donc reliés à leur homologue du matériau sain par

$$E(\alpha) = a(\alpha)E_0, \qquad \nu(\alpha) = \nu_0. \tag{1.4}$$

1.2.2 Leurs propriétés énergétiques

Les différentes énergies et leur utilité

Du fait du caractère standard de l'évolution, ce type de modèle se prête bien à un traitement en termes d'énergies. Ainsi, il s'avère que *le travail de déformation est une fonction d'état*, *i.e.* le travail fourni pour faire passer le matériau de l'état naturel sain($\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$) à un état de déformation-endommagement (ε, α) est indépendant du trajet de déformation suivi. En effet, soit $t \mapsto \epsilon(t)$ un trajet de déformation allant de $\epsilon(0) = 0$ à $\epsilon(1) = \varepsilon$. Le matériau étant initialement sain, $\alpha(0) = 0$, le travail de déformation W est donné par

$$W = \int_0^1 \sigma(t) \cdot \dot{\epsilon}(t)dt = \int_0^1 A(\alpha(t))\epsilon(t) \cdot \dot{\epsilon}(t)dt. \tag{1.5}$$

Mais comme, en vertu de (1.1), on a à chaque instant

$$\left(\frac{1}{2}A'(\alpha(t))\epsilon(t) \cdot \epsilon(t) + k \right) \dot{\alpha}(t) = 0, \tag{1.6}$$

en reportant dans (1.5) on fait apparaître une dérivée exacte. Compte tenu des valeurs de l'état aux extrémités du trajet, il vient finalement

$$W = \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + k\alpha, \tag{1.7}$$

expression dans laquelle il est facile de distinguer les notions d'énergie élastique, d'énergie dissipée et de travail de déformation :

$$\textit{Energie élastique volumique} \quad : \quad \psi(\varepsilon, \alpha) = \tfrac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon \tag{1.8}$$

$$\textit{Energie dissipée volumique} \quad : \quad w(\alpha) = k\alpha \tag{1.9}$$

$$\textit{Energie de déformation volumique} \quad : \quad W(\varepsilon, \alpha) = \psi(\varepsilon, \alpha) + w(\alpha) \tag{1.10}$$

Ce faisant la relation contrainte-déformation et la loi d'évolution peuvent s'écrire :

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \alpha) \tag{1.11}$$

$$\dot{\alpha} \geq 0 \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha)(\beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \quad \forall \beta \geq 0, \tag{1.12}$$

remarque qui s'avère décisive pour la formulation variationnelle du problème d'évolution et les propriétés énergétiques des solutions. Mais l'utilité de la fonction d'état énergie de déformation W ne s'arrête pas là. Il s'avère que les propriétés d'écrouissage du matériau sont directement liées aux propriétés de convexité de cette fonction. Le résultat est suffisamment important pour qu'on en fasse une proposition.

Proposition 1 (Convexité et écrouissage)**.**

1. *La condition d'écrouissage en déformation est équivalente à la convexité de l'énergie de déformation par rapport à α à ε fixé ;*
2. *La condition d'écrouissage en contrainte*[2] *est équivalente à la convexité de l'énergie de déformation par rapport au* **couple** (ε, α)*.*

Preuve. La première partie de la proposition est évidente. Pour alléger la présentation, on se contentera de démontrer la deuxième dans le cas de l'exemple de modèle ci-dessus où $A(\alpha) = a(\alpha)A_0$. On a vu qu'il y avait durcissement si et seulement si $1/a$ était concave, condition qui s'écrit aussi (compte tenu de la positivité de a)

$$2a'(\alpha)^2 \leq a(\alpha)a''(\alpha) \qquad \forall \alpha. \tag{1.13}$$

La convexité de W est équivalente à la positivité de sa dérivée seconde, *i.e.* à l'inégalité

$$a''(\alpha)A_0\varepsilon \cdot \varepsilon \ \beta^2 + 4a'(\alpha)A_0\varepsilon \cdot e \ \beta + 2a(\alpha)A_0 e \cdot e \geq 0, \qquad \forall \varepsilon, \forall \alpha, \forall e, \forall \beta, \tag{1.14}$$

qui est possible pour tout β si et seulement si

$$2a'(\alpha)^2(A_0\varepsilon \cdot e)^2 \leq a(\alpha)a''(\alpha) \ A_0\varepsilon \cdot \varepsilon \ A_0 e \cdot e \qquad \forall \alpha, \forall \varepsilon, \forall e. \tag{1.15}$$

2. On parle aussi de *durcissement* s'il y a écrouissage en contrainte et d'*adoucissement* sinon.

Mais sachant que $(A_0\varepsilon \cdot e)^2 \leq A_0\varepsilon \cdot \varepsilon \; A_0 e \cdot e \quad \forall \varepsilon, \forall e$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) et que l'égalité a lieu quand $\varepsilon = e$, il est facile de voir que (1.13) est équivalente à (1.15). □

Il faut d'autre part noter que, comme $A(\alpha) > 0$, W est une fonction convexe de ε à α fixé. Par conséquent la différence entre écrouissage en déformation et écrouissage en contrainte tient à la convexité de W par rapport au couple de variables d'état dans le deuxième cas alors qu'elle n'est convexe que par rapport à chaque variable séparément dans le premier. Cette première condition est évidemment moins forte que la deuxième qui, elle, s'avère essentielle dans l'établissement de résultats d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions du problème d'évolution comme le montrent les paragraphes qui suivent.

Le problème d'évolution

Si l'on considère maintenant une structure dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, qui est constituée du matériau endommageable précédent et qui est soumise à un chargement (dépendant d'un paramètre $t > 0$), le problème quasistatique d'évolution consiste à chercher, à chaque "instant" t, les champs des déplacements u_t, d'endommagement α_t et des contraintes σ_t vérifiant les équations d'équilibre, les conditions aux limites, les conditions initiales et la loi d'évolution de l'endommagement. Autrement dit, en écrivant les équations d'équilibre sous forme variationnelle et en tenant compte de (1.12), u_t et α_t ont à vérifier :

$$u_t \in \mathcal{C}_t, \qquad \alpha_t \in \mathcal{D}, \tag{1.16}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(u_t), \alpha_t) \cdot \varepsilon(v - \dot{u}_t)\, dx = f_t(v - \dot{u}_t) \qquad \forall v \in \dot{\mathcal{C}}_t \tag{1.17}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial \alpha}(\varepsilon(u_t), \alpha_t)(\beta - \dot{\alpha}_t)\, dx \geq 0 \qquad \forall \beta \in \dot{\mathcal{D}}_t \tag{1.18}$$

où $\mathcal{C}_t$ [3] et $\dot{\mathcal{C}}_t$ désignent respectivement les ensembles de déplacements ou de vitesses cinématiquement admissibles à l'instant t, $\mathcal{D}_t$ et $\dot{\mathcal{D}}_t$ [4] désignent respectivement les ensembles de champs d'endommagement ou de vitesses d'endommagement admissibles à l'instant t — ces dernières sont nécessairement non négatives pour traduire le caractère irréversible de l'endommagement —, alors que f_t représente la forme linéaire (donnant la puissance des efforts extérieurs) associée aux forces imposées à l'instant t.

On voit immédiatement que ce problème d'évolution fait intervenir la fonctionnelle *énergie potentielle*, différence entre l'énergie de déformation et le potentiel des efforts extérieurs. Posons donc

$$\mathcal{P}_t(v, \beta) = \int_\Omega W(\varepsilon(v)(x), \beta(x))\; dx - f_t(v), \qquad (v, \beta) \in \mathcal{C}_t \times \mathcal{D}_t. \tag{1.19}$$

Alors (1.17)–(1.18) sont équivalentes à

$$D\mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t)(v - \dot{u}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0 \qquad \forall (v, \beta) \in \dot{\mathcal{C}}_t \times \dot{\mathcal{D}}_t, \tag{1.20}$$

où $DJ(f)(\phi)$ désigne la dérivée de J en f dans la direction ϕ.

3. Dans toute la suite $\mathcal{C}_t$ est supposée être un espace affine, son espace vectoriel associé sera noté $\mathcal{C}_t^0$.

4. Souvent $\mathcal{D}_t$ est en fait indépendant de t, mais $\dot{\mathcal{D}}_t$, lui, peut en dépendre. Par exemple si α doit prendre ses valeurs entre 0 et 1, bornes incluses, la vitesse d'endommagement sera nécessairement nulle aux point x où, à l'instant t, $\alpha(x, t) = 1$.

Le problème incrémental

L'établissement de résultats précis d'existence, d'unicité et de régularité des solutions au problème d'évolution pose des difficultés d'ordre technique. Il est par contre plus facile d'en établir sur le problème incrémental, *i.e.* celui obtenu après discrétisation en temps. En pratique c'est toujours ce dernier que l'on résout numériquement.

Pour le construire, il suffit de remplacer la variable de temps "continu" t par une suite (discrète) de temps — on parlera alors d'étape ou de pas de temps i, $i \in \mathbb{N}$ —, et les vitesses par des accroissements. Le problème incrémental consiste alors à trouver, pour $i \in \mathbb{N}_*$, les champs u_i et α_i vérifiant

$$\begin{cases} (u_i, \alpha_i) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \\ D\mathcal{P}_i(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_i \times \mathcal{D}_i \end{cases} \tag{1.21}$$

où $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{D}_i$ désignent respectivement l'ensemble des champs de déplacements et des endommagements admissibles à l'étape i, ce dernier tenant compte maintenant de la condition d'irréversibilité, *i.e.*

$$\beta(x) \geq \alpha_{i-1}(x), \qquad \forall x \in \Omega. \tag{1.22}$$

De ce fait les problèmes aux différentes étapes sont couplés, la solution à une étape dépend de la solution à l'étape précédente. Leur résolution se fait donc par induction à partir de la donnée α_0 du champ d'endommagement initial.

La notion d'état stable

Lorsqu'il n'y a pas unicité de la configuration d'équilibre d'un système sous une sollicitation donnée, l'étude de leur stabilité fournit un critère de sélection. En toute rigueur, la stabilité est une notion *dynamique*. En particulier un état d'équilibre *sous une sollicitation donnée* est stable si, une fois écarté "un peu" de cet état d'équilibre, le système, *soumis encore à la seule sollicitation donnée*, ne s'écartera jamais "beaucoup", durant son évolution, de cet état d'équilibre. On voit donc que l'étude de la stabilité passe par

1. la connaissance de la dynamique du système ;
2. le choix d'une distance entre les états.

Si ce deuxième point — qui ne pose problème que pour des systèmes dont l'espace des états est de dimension infinie (car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes) —, peut être généralement réglé par des considérations physiques, le premier par contre se révèle être souvent un obstacle insurmontable. On préfère alors remplacer la notion dynamique de stabilité par une notion plus heuristique. C'est en particulier le cas pour les systèmes "conservatifs" (tels les solides élastiques soumis à des charges mortes) dans lesquels les "forces motrices" dérivent d'un potentiel. On considère pour eux que les états stables sont les *minima locaux* du potentiel. On s'appuie pour cela sur l'équivalence rigoureusement établie entre ces deux notions de stabilité pour des systèmes à nombre fini de paramètres d'état. En effet la dynamique de tels systèmes est régie par un système d'équations différentielles autonomes du type

$$\ddot{x}(t) = -D\mathcal{P}(x(t)), \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{1.23}$$

l'état x du système étant un vecteur de $\mathbb{R}^N$. On peut alors établir les conditions de stabilité dynamique suivantes pour un état x, cf [7], [31] :

$$\textbf{Condition nécessaire de stabilité} \quad : \quad D\mathcal{P}(x) = 0, \quad D^2\mathcal{P}(x) \geq 0; \tag{1.24}$$

$$\textbf{Condition suffisante de stabilité} \quad : \quad D\mathcal{P}(x) = 0, \quad D^2\mathcal{P}(x) > 0, \tag{1.25}$$

qui permet de se limiter à l'étude du potentiel $\mathcal{P}$ au voisinage des positions d'équilibre. On aboutit ainsi au fameux critère de la dérivée seconde de l'énergie. Par extension on adopte *a priori* ces mêmes conditions pour des systèmes conservatifs à nombre infini de degrés de liberté, cf [39], [31], voire pour des systèmes non conservatifs, cf [43]. C'est ce que l'on se propose de faire ici pour les structures fragiles à loi d'endommagement standard qui, bien que non conservatives, ont une énergie fonction d'état. Toutefois le caractère irréversible de l'endommagement oblige à modifier légèrement la définition heuristique d'état stable.

Définition 1 (Stabilité au sens de l'énergie)**.** *Un état admissible de déplacement-endommagement d'une structure fragile soumise à un chargement donné est dit stable si et seulement s'il existe un voisinage d'états admissibles dans lequel tout autre état* **accessible** *a une énergie potentielle supérieure.*

La différence avec un système conservatif tient à la notion de minimum local par rapport aux seuls états accessibles. La motivation est la suivante : on considère que même s'il existe au voisinage d'un état des états d'énergie moindre mais dont l'endommagement est moindre, comme l'endommagement ne peut qu'augmenter, la structure ne pourra pas s'y diriger et ils n'interviendront donc pas dans le processus dynamique. On remarquera en outre le caractère *strict* du minimum local exigé. Ce faisant si l'on note $B_h(u,\alpha)$ la boule (pour une norme à préciser) dans l'ensemble $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ des états admissibles de la structure sous une sollicitation donnée, de centre (u,α) et de rayon h, et $B_h^+(u,\alpha)$ le sous-ensemble des états accessibles, *i.e.*

$$\left\{\begin{array}{rcl} B_h(u,\alpha) & = & \{(v,\beta)\in\mathcal{C}\times\mathcal{D} : \|(v-u,\beta-\alpha)\| \leq h\} \\ B_h^+(u,\alpha) & = & \{(v,\beta)\in B_h(u,\alpha) : \beta\geq\alpha, (v,\beta)\neq(u,\alpha)\}, \end{array}\right. \tag{1.26}$$

la notion de stabilité d'un état se formalise comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{c} (u,\alpha) \text{ est } \mathcal{P}-\textit{stable} \text{ dans } \mathcal{C}\times\mathcal{D} \\ \Updownarrow \\ \exists h>0, \quad \forall (v,\beta)\in B_h^+(u,\alpha) \qquad \mathcal{P}(v,\beta)>\mathcal{P}(u,\alpha). \end{array}} \tag{1.27}$$

Remarque 2. *Il est essentiel de noter que le caractère stable d'un état dépend du type de sollicitation imposée. Ainsi un même état pourra être stable dans des conditions de déplacement imposé et instable dans des conditions de force imposée. Ces conditions de sollicitation apparaissent dans la définition ci-dessus de la stabilité d'une part par l'intermédiaire de l'ensemble $\mathcal{C}$ des déplacements admissibles caractérisant les données cinématiques et d'autre part par l'intermédiaire de l'énergie potentielle dont l'expression tient compte des efforts extérieurs donnés. Ces propos seront illustrés dans la prochaine Sous-section.*

On peut tirer de la définition une première condition nécessaire de stabilité. Soient (u, α) un état stable et $(v, \beta) \in B_1^+(u, \alpha)$. En supposant que $\mathcal{P}$ est Gateaux-différentiable en (u, α) dans la direction (v, β), on a nécessairement pour θ positif, assez petit :

$$\begin{aligned} 0 &< \mathcal{P}(u + \theta(v - u), \alpha + \theta(\beta - \alpha)) - \mathcal{P}(u, \alpha) && (1.28) \\ &= \theta D\mathcal{P}(u, \alpha)(v - u, \beta - \alpha) + o(\theta). && (1.29) \end{aligned}$$

En divisant par θ et en passant à la limite quand θ tend vers 0, on obtient l'inégalité

$$D\mathcal{P}(u, \alpha)(v - u, \beta - \alpha) \geq 0 \qquad \forall (v, \beta) \in B_1^+(u, \alpha). \tag{1.30}$$

Mais par homogénéité l'inégalité vaut en fait pour $(v, \beta) \in B_r^+(u, \alpha)$, pour tout $r > 0$. D'où finalement la

Proposition 2 (Première Condition Nécessaire de Stabilité)**.** *Un état (u, α) est $\mathcal{P}-$stable dans $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ seulement si*

$$D\mathcal{P}(u, \alpha)(v - u, \beta - \alpha) \geq 0 \qquad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}, \quad \beta \geq \alpha \tag{1.31}$$

En fait, il est facile de voir que (1.31) est satisfaite si et seulement si (u, α) est admissible, vérifie l'équilibre et le critère d'endommagement, *i.e.*

1. $(u, \alpha) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$;
2. $\int_\Omega A(\alpha)\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v)dx = f(v), \quad \forall v \in \mathcal{C}^0$;
3. $A'(\alpha)\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + 2k \geq 0$ *presque partout dans* Ω.

Autrement dit les états stables sont à chercher parmi les états d'équilibre vérifiant le critère. Cette condition est évidemment à rapprocher de (1.21). En oubliant les indices relatifs au pas de temps, on voit que les deux inégalités coïncident à condition d'identifier α_{i-1} à α_i. Mais comme $\alpha_{i-1} \leq \alpha_i$, (1.21) est en fait une condition plus forte que (1.31), qui n'est malheureusement qu'une condition nécessaire de stabilité, en général pas suffisante. A ce stade, on peut donc seulement conclure que les solutions de (1.21) sont des bons candidats à la stabilité, mais qu'il leur reste à remplir des conditions supplémentaires pour être retenus.

1.2.3 Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité

Dans cette Sous-section nous nous proposons d'établir quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions au problème incrémental et quelques résultats de stabilité des états. Nous envisageons pour cela différents types de chargement et différentes propriétés d'écrouissage.Pour simplifier les expressions, mais cela n'enlève rien au caractère générique des résultats, nous supposerons que

$$\alpha \in [0, \infty), \qquad A(\alpha) = 2a(\alpha)I, \quad I \text{ tenseur identité}, \qquad k = 1, \tag{1.32}$$

a étant une fonction strictement positive, deux fois continûment dérivable, sa dérivée première étant strictement négative (assouplissement) et sa dérivée seconde strictement positive (écrouissage en déformation). On prend pour norme dans l'espace des états la norme H^1 pour les déplacements et la norme L^∞ pour l'endommagement :

$$\|(u, \alpha)\| = \|u\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.33}$$

Cas des structures à déplacements contrôlés

Pour illustrer l'importance du type de chargement, on va supposer que l'on est capable de contrôler les déplacements *en tout point* de la structure à chaque instant et donc qu'on peut lui imposer tout déplacement (régulier) $u(t)$, fonction régulière de t. Dans ce cas l'ensemble des déplacements admissibles $\mathcal{C}(t)$ se réduit au seul déplacement imposé $u(t)$ [5]. Le problème d'évolution se réduit donc à la détermination de $\alpha(t)$, ce qui se fait à partir de la loi d'évolution (1.1) et la condition initiale $\alpha(0) = \alpha_0$. Compte tenu de la condition adoptée d'écrouissage en déformation, il est facile de voir que (1.1) possède une solution et une seule dès lors que le champ $u(0)$ est compatible avec α_0, *i.e.* $\varepsilon(u(0)) \in \mathcal{E}(\alpha_0)$, p.p. dans Ω, la répartition de l'endommagement dans la structure se faisant point par point, puisque $\varepsilon(u(t))$ est connu localement à chaque instant.

Du point de vue de la stabilité, montrons la

Proposition 3. *Tout état* (u, α) *vérifiant le critère,* i.e. *tel que* $a'(\alpha)\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + 1 \geq 0$, *p.p. dans* Ω, *est* $\mathcal{P} - stable$ *dans* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Preuve. Soit (u, α) un tel état. Les états accessibles sont donc les couples (u, β) avec $\beta \geq \alpha$. Posons $\beta = \alpha + h\varphi$ avec $0 < h \leq 1$, $\varphi \geq 0$, $\sup\operatorname{ess}_\Omega \varphi = 1$. En vertu du théorème de la valeur moyenne, il existe, pour presque tout $x \in \Omega$, $\theta(x) \in [0, 1]$ tel que

$$a(\beta(x)) = a(\alpha(x)) + ha'(\alpha(x))\varphi(x) + \frac{h^2}{2} a''(\alpha(x) + \theta(x)\varphi(x))\varphi(x)^2.$$

Compte tenu de la positivité de a'', en posant $2c = \min\{a''(\gamma) : 0 \leq \gamma \leq \sup\operatorname{ess}_\Omega \alpha + 1\} > 0$, on a

$$a(\beta(x)) \geq a(\alpha(x)) + ha'(\alpha(x))\varphi(x) + ch^2\varphi(x)^2, \quad p.p.\ x \in \Omega.$$

En reportant cette inégalité dans l'expression de l'énergie potentielle (qui se réduit ici à l'énergie de déformation), il vient

$$\mathcal{P}(u, \beta) - \mathcal{P}(u, \alpha) \quad \geq \quad h \int_\Omega \left(a'(\alpha)\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + 1\right) \varphi \, dx + ch^2 \int_\Omega \varphi^2 \, dx. \tag{1.34}$$

La première intégrale du second membre est positive ou nulle puisque (u, α) vérifie le critère. La seconde est strictement positive. Donc (u, α) est un minimum de $\mathcal{P}$ sur $B_1^+(u, \alpha)$, d'où le résultat. □

Ce résultat montre bien qu'à déplacement contrôlé, c'est la propriété d'écrouissage en déformation qui est essentielle. Malheureusement, en pratique, il n'est pas possible de contrôler les déplacements en tout point de la structure, mais ce sont les forces volumiques qui sont imposées [6]. On va voir que dans ce cas c'est la propriété d'écrouissage en contraintes qui intervient. Pour le montrer, on distingue le cas des matériaux se durcissant de celui des matériaux s'adoucissant.

5. C'est un espace affine dont l'espace vectoriel associé est $\{0\}$
6. Très souvent l'ingénieur les négligent, ce qui veut dire qu'elles sont implicitement imposées ... à 0.

Cas des structures à forces volumiques imposées, avec durcissement

Commençons par le cas où le matériau est strictement durcissant. On sait qu'alors W est strictement convexe. La structure est soumise à des forces volumiques données, une partie du bord est encastré de façon à interdire tout déplacement rigide alors que sa partie complémentaire est soumise à des forces surfaciques données. A l'instant initial la structure est non endommagée. En conséquence le problème incrémental consiste à trouver, pour $i \in \mathbb{N}_*$, les champs u_i et α_i vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_i, \alpha_i) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}_i \\ D\mathcal{P}_i(u_i, \alpha_i)(v - u_i, \beta - \alpha_i) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}_i \end{array} \right. \tag{1.35}$$

l'ensemble des déplacements admissibles $\mathcal{C}$ étant un espace vectoriel indépendant du pas de temps, $\mathcal{D}_i = \{\beta \in L^\infty(\Omega) : \beta \geq \alpha_{i-1} \ p.p. \ dans \ \Omega\}$ et l'énergie potentielle $\mathcal{P}_i$ valant

$$\mathcal{P}_i(v, \beta) \quad = \quad \int_\Omega (a(\beta)\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) + \beta) \ dx - f_i(v). \tag{1.36}$$

Mais comme $\mathcal{P}_i$ est strictement convexe, (1.35) est équivalent à, cf [19],

$$Trouver \quad (u_i, \alpha_i) \quad minimisant \quad \mathcal{P}_i \quad sur \quad \mathcal{C} \times \mathcal{D}_i. \tag{1.37}$$

De plus la solution si elle existe est unique. Ceci règle du même coup la question de stabilité puisque la solution est un minimum *global* strict. Seule l'existence pourrait poser problème. En fait tout dépend de la coercivité de $\mathcal{P}_i$ à l'infini. Moyennant une hypothèse un peu plus forte sur l'écrouissage cette condition est assurée. Mais comme ce sont plutôt les matériaux adoucissants qui nous intéressent, nous ne la détaillerons pas.

Cas des structures à forces volumiques imposées, avec adoucissement

Considérons maintenant des structures à forces volumiques imposées, constituées d'un matériau strictement adoucissant, *i.e.* tel que

$$\exists c > 0 \quad \forall \alpha \geq 0 \qquad 2a'(\alpha)^2 - a(\alpha)a''(\alpha) \geq c. \tag{1.38}$$

Il est bien connu que dans ce cas on ne peut être assuré ni de l'existence, ni de l'unicité des solutions au problème d'évolution. En effet,

1. **Pour la non existence.** Il suffit de considérer le problème d'une barre en traction simple, avec forces linéiques nulles, pour constater qu'elle ne pourra supporter une traction plus grande que $a(0)/\sqrt{|a'(0)|}$. De façon générale, comme les contraintes ne peuvent sortir du domaine d'élasticité initial $\mathcal{E}^*(0)$, convexe borné, la structure ne pourra pas supporter n'importe quel chargement et on retrouve la problématique du calcul à la rupture.
2. **Pour la non unicité.** La non unicité n'est guère plus difficile à mettre en évidence. Il suffit de reprendre le problème précédent de traction simple d'une barre mais en imposant cette fois non plus la force mais le déplacement des extrémités. Il est alors possible de construire une infinité de solutions au problème d'évolution, en jouant sur les zones avec décharge élastique. Tout provient du fait que l'on ne contrôle pas la déformation de chaque point de la barre, mais seulement la déformation moyenne de la barre. Et comme pour un même niveau de contraintes, plusieurs valeurs de la déformation sont possibles, on peut engendrer ainsi une infinité de solutions.

Reste la question de la stabilité des solutions. La non unicité de solution serait un mal supportable si le critère de stabilité permettait d'en rejeter beaucoup et d'en retenir quelqu(es) une(s). Mais il suffit de se placer en dimension 1 pour déchanter, car on a la

Proposition 4 (Instabilité des états d'équilibre en phase d'endommagement).
Tout état d'équilibre tel que le critère d'endommagement est atteint sur un ensemble de mesure non nulle est **instable**.

Preuve. Il semble que ce résultat soit général [7]. Mais nous nous contenterons (très modestement) d'en donner une démonstration dans le cadre unidimensionnel. On considère donc une barre $\Omega = (0, 1)$ soumise à des forces linéiques f, dont l'extrémité $x = 0$ est fixée alors que l'extrémité $x = 1$ est soumise *soit* à une force, *soit* à un déplacement. Les deux situations seront tour à tour considérées.

On considère un état d'équilibre et ne violant pas le critère, *i.e.* un état (u, α) vérifiant la première condition nécessaire de stabilité (1.31). On note D la partie du domaine où le critère d'endommagement est atteint, *i.e.*

$$D = \{x \in \Omega : a'(\alpha(x))u'(x)^2 + 1 = 0\} \tag{1.39}$$

Considérons des états de la forme $(u + hv, \alpha + h\varphi)$ avec $h > 0$, $v \in \mathcal{C}^0$, $\varphi \in \mathcal{D}$ et tels que

$$D\mathcal{P}(u, \alpha)(v, \varphi) = 0, \tag{1.40}$$

ce qui revient à considérer des champs $\varphi \geq 0$, nuls là où le critère n'est pas atteint, *i.e.* dans $\Omega \setminus D$. Pour h voisin de 0, l'énergie potentielle admet le développement suivant (avec des dérivées au sens de Gateaux) :

$$\mathcal{P}(u + hv, \alpha + h\varphi) = \mathcal{P}(u, \alpha) + \frac{h^2}{2} D^2 P(u, \alpha)(v, \varphi) + o(h^2). \tag{1.41}$$

Par conséquent, si on arrive à trouver un couple (v, φ) tel que

$$I \equiv D^2 P(u, \alpha)(v, \varphi) < 0 \tag{1.42}$$

on pourra conclure à l'instabilité de (u, α). Commençons par expliciter I en utilisant les notations condensées suivantes :

$$a_0(x) \equiv a(\alpha(x)), \quad a_1(x) \equiv a'(\alpha(x)), \quad a_2(x) \equiv a''(\alpha(x)). \tag{1.43}$$

Il vient

$$I = \int_\Omega 2a_0(x)v'(x)^2\, dx + \int_D \left(4a_1(x)u'(x)v'(x)\varphi(x) - \frac{a_2(x)}{a_1(x)}\varphi(x)^2\right) dx. \tag{1.44}$$

Minimisons I par rapport à v, à φ fixé. Il faut distinguer pour cela les deux types de chargement.

1. **Extrémité $x = 1$ à force imposée.** Un calcul élémentaire donne comme v optimal :

$$v'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} u'(x)\varphi(x), \tag{1.45}$$

7. Mais à la connaissance des auteurs, s'il est communément admis voire clamé, on n'en trouve aucune (vraie) démonstration dans la littérature.

ce qui en reportant dans I donne :

$$I = -\int_D \left(\frac{a_2(x)}{a_1(x)} - 2\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right) \varphi(x)^2 \, dx. \tag{1.46}$$

Mais du fait de la condition d'adoucissement (1.38) et de la négativité de a_1, on a $I < 0$ en prenant $\varphi \not\equiv 0$, dès lors que D est de mesure non nulle.

2. **Extrémité $x = 1$ à déplacement imposé.** Dans ce cas le v optimal est donné par :

$$v'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} u'(x)\varphi(x) + \frac{\displaystyle\int_D \frac{a_1}{a_0} u'\varphi \, dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{dx}{a_0}} \, \frac{1}{a_0(x)}, \tag{1.47}$$

ce qui en reportant dans I donne :

$$I = -\int_D \left(\frac{a_2(x)}{a_1(x)} - 2\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \right) \varphi(x)^2 \, dx + \frac{2}{\displaystyle\int_\Omega \frac{dx}{a_0(x)}} \left(\int_D \frac{a_1(x)}{a_0(x)} u'(x)\varphi(x) \, dx \right)^2. \tag{1.48}$$

La différence par rapport au cas précédent tient à l'ajout d'un terme positif au second membre. Mais cela ne peut changer la conclusion. En effet, en prenant pour φ une fonction caractéristique telle que la mesure de son support soit $\theta \, mes(D)$ avec θ assez petit, ce deuxième terme est de l'ordre de θ^2 alors que le premier (négatif) est de l'ordre de θ. Par conséquent, pour θ assez petit, $I < 0$.

□

Pour démontrer ce résultat en dimension supérieure à 1, on peut suivre une démarche analogue, mais on ne peut plus faire le calcul explicite de l'optimum en v. Il faut alors construire des suites de φ astucieusement en mélangeant finement des zones où $\varphi(x) = 0$ et des zones où $\varphi(x) = 1$. Les auteurs de ce rapport tiennent à la disposition du lecteur intéressé une démonstration valable dans le cas de problèmes antiplan. Elle s'appuie en particulier sur des notions de Γ-convergence et sur des propriétés de bornes optimales de coefficients homogénéisés.

En conclusion, on voit que, seuls, les états d'équilibre élastiques, *i.e.* ceux pour lesquels (presque) aucun point de la structure n'a atteint le critère d'endommagement, ont une chance d'être stables. Cela en fait évidemment bien peu et en tout cas trop peu pour conserver ce type de modèles en l'état.

1.3 Les modèles d'endommagement fragiles standards régularisés

1.3.1 Leur formulation

L'analyse précédente montre que les modèles d'endommagement fragiles standards avec adoucissement ne sont pas viables. Si l'on pourrait toujours se satisfaire de la non existence de solutions dans certains cas, puisque cela ne fait que refléter l'impossibilité constatée des structures réelles à supporter des chargements trop élevés, si l'on pourrait toujours se satisfaire de la non unicité de solutions,

puisque cela ne fait que refléter la très grande diversité des configurations possibles des systèmes complexes non linéaires, il est par contre intolérable que l'on ne puisse trouver de configurations stables "non triviales". Il est donc nécessaire d'y apporter quelques modifications. Si l'on regarde de près la démonstration de la non stabilité des états d'équilibre en phase d'endommagement, on s'aperçoit que cela tient au fait que l'on peut envisager des états proches de moindre énergie étant plus endommagés sur une zone que l'on peut choisir aussi petite que l'on veut sans que cela coûte de l'énergie. Il n'en serait plus de même si l'on introduisait une longueur caractéristique dans le modèle de façon à ce que toute concentration d'endommagement sur une zone de dimension plus petite coûte beaucoup d'énergie. Ce ne serait donc plus des échappatoires énergétiques. Une façon simple d'arriver à cela consiste à rajouter dans l'énergie un terme faisant intervenir le gradient d'endommagement [8]. C'est ce que nous nous proposons de faire. Toutefois une question ne va pas manquer de surgir lorsque ce terme sera introduit, à savoir "quelle loi d'évolution choisir ?". C'est ici que toute l'approche précédente en termes d'énergie va se révéler très puissante. En fait, tout va découler du changement de la forme de l'énergie. Le problème d'évolution et la stabilité des états vont se formuler toujours de la même façon, l'un à partir des premières variations de l'énergie, l'autre à partir de la notion de minimum local.

Le choix de l'énergie de déformation

Pour construire ces modèles d'endommagement régularisés, nous adoptons, comme pour leur homologue non régularisés, un point de vue purement macroscopique et phénoménologique. On considère donc que pour l'élément de volume le gradient d'endommagement $\nabla\alpha$ est une variable d'état au même titre que ε et α. Mais contrairement à la coutume nous n'allons pas postuler une forme de dépendance de l'énergie libre vis à vis de ces variables d'état locales, puis introduire des lois complémentaires régissant l'évolution des variables internes $(\alpha, \nabla\alpha)$ *via* des potentiels de dissipation. Nous postulons directement la forme de l'énergie de déformation W fonction de $(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$. Comme nous nous limitons à un cadre linéaire, nous supposerons que W peut se développer au voisinage de $\varepsilon = 0$ et $\nabla\alpha = 0$ jusqu'au deuxième ordre, ce qui conduit à l'expression suivante de W :

$$\begin{aligned} W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) &= w(\alpha) + \sigma_0(\alpha)\cdot\varepsilon + g_0(\alpha)\cdot\nabla\alpha + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon\cdot\varepsilon + C(\alpha)\varepsilon\cdot\nabla\alpha + \tfrac{1}{2}L(\alpha)\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha, \end{aligned} \tag{1.49}$$

où $\sigma_0(\alpha)$ est le tenseur des précontraintes, $g_0(\alpha)$ est un vecteur, $A(\alpha)$ est le tenseur de rigidité, $C(\alpha)$ est un tenseur d'ordre 3 et $L(\alpha)$ une matrice. Si l'on suppose de plus que le matériau est isotrope et que le paramètre d'endommagement est un scalaire objectif (invariant par changement de référentiel), alors W devant lui même être objectif, on doit avoir :

$$W(Q\varepsilon Q^T, \alpha, Q\nabla\alpha) = W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha), \qquad \forall Q, \quad Q^{-1} = Q^T. \tag{1.50}$$

Mais ceci est possible si et seulement si $\sigma_0(\alpha)$ est un tenseur sphérique, $g_0(\alpha)$ et $C(\alpha)$ sont nuls, $A(\alpha)$ est un tenseur isotrope et $L(\alpha)$ est proportionnelle à l'identité. Par conséquent, W peut se mettre sous la forme :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = w(\alpha) + p_0(\alpha)\,Tr(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon\cdot\varepsilon + \tfrac{1}{2}l(\alpha)\,\nabla\alpha\cdot\nabla\alpha, \tag{1.51}$$

8. Mais on pourrait opter pour l'ajout de termes avec énergie de surface ou avec gradient de déformation.

$p_0(\alpha)$ et $l(\alpha)$ étant maintenant des scalaires. Comme nous n'avions pas tenu compte du terme de précontraintes dans le modèle non régularisé, nous continuerons à l'ignorer et posons

$$p_0(\alpha) = 0.$$

Le seul terme qui diffère est donc finalement le terme en $\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha$. Pour des raisons de positivité du travail de déformation et pour améliorer la stabilité, le scalaire $l(\alpha)$ est nécessairement non négatif. En le prenant nul, on reviendrait au modèle précédent. Nous le supposerons donc strictement positif.

On voit donc qu'un modèle d'endommagement standard régularisé fait intervenir 3 fonctions du paramètre d'endommagement : A, w et l. Mais comme nous le remarquions dans le modèle initial, on peut en fixer une en changeant simplement de paramètre d'endommagement, sans changer pour autant les propriétés intrinsèques du matériau [9]. Par exemple, sachant que $\alpha \in [0, \infty)$, il existe un seul changement de paramètre $\beta = f(\alpha)$ tel que $f(0) = 0$ et tel que $l \circ f^{-1}$ soit une constante donnée. En effet, α étant supposé sans dimension, $l(\alpha)$ a la dimension du produit d'une pression par le carré d'une longueur (autrement dit d'une force). Donnons nous une *longueur de référence* ℓ et posons

$$\beta = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{l(a)}{E_0\ell^2}}\, da, \tag{1.52}$$

où E_0 est le module d'Young du matériau sain, l'énergie de déformation s'écrit maintenant en termes des nouvelles variables d'état :

$$\bar{W}(\varepsilon, \beta, \nabla\beta) = \bar{w}(\beta) + \tfrac{1}{2}\bar{A}(\beta)\varepsilon \cdot \varepsilon + \tfrac{1}{2}E_0\ell^2\nabla\beta \cdot \nabla\beta.$$

Nous supposerons désormais que le changement de variable a été fait, nous continuerons à appeler la variable d'endommagement α et omettons la barre $^-$ au dessus des fonctions W, w et A. D'où l'expression finalement retenue de l'énergie de déformation, ne faisant plus apparaître que deux fonctions à déterminer expérimentalement w et A [10] :

$$\boxed{W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = w(\alpha) + \tfrac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + \tfrac{1}{2}E_0\ell^2\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha} \tag{1.53}$$

$w(\alpha)$ correspond toujours à l'énergie volumique dissipée pour le modèle non régularisé. Quant à $A(\alpha)$, nous nous placerons dans le cas le plus défavorable, à savoir celui où il y a adoucissement (mais écrouissage en déformation).

Il faut cependant faire attention au fait que le choix du paramètre d'endommagement diffère dans le modèle régularisé de celui fait dans le modèle non régularisé. Pour ce dernier α correspondait, à un coefficient multiplicatif près de normalisation, à l'énergie volumique dissipée. On avait alors montré que les propriétés d'écrouissage étaient équivalentes à des propriétés de convexité de l'énergie

9. On pourrait formaliser cela en introduisant une relation d'équivalence entre les modèles. Deux modèles tels que les fonctions associées (A, w, l) et $(\bar{A}, \bar{w}, \bar{l})$ se déduiraient les unes des autres par un changement de variable — *i.e.* s'il existait un difféomorphisme croissant f tel que $(\bar{A}, \bar{w}, \bar{l}) = (A \circ f^{-1}, d \circ f^{-1}, l \circ f^{-1})$ —, seraient dits équivalents.

10. En fait la détermination de $A(\alpha)$ se réduit à celle des 2 coefficients de Lamé $\lambda(\alpha)$ et $\mu(\alpha)$ si le matériau est isotrope. Donc en tout il faut identifier 3 fonctions scalaires.

de déformation. Maintenant, comme nous avons choisi de normaliser le terme en gradient d'endommagement, le paramètre d'endommagement n'est plus (en général) proportionnel à l'énergie volumique dissipée. Ce faisant les propriétés de convexité n'étant pas invariantes par changement de variable, il faut repréciser comment les conditions adoptées se traduisent en termes des fonctions A et w.

Nous voulons que le matériau ait toujours une élasticité positive, soit $A(\alpha) > 0$ (ou de façon équivalente que $s(\alpha) \equiv A(\alpha)^{-1} > 0$. Nous voulons que le matériau s'assouplisse en dissipant de l'énergie quand il s'endommage, soit $A'(\alpha) < 0$ (ou encore $s'(\alpha) > 0$) et $w'(\alpha) > 0$. Nous voulons qu'il y ait écrouissage en déformation (pour des états d'endommagement homogènes). Or le critère en déformation s'écrivant maintenant $\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w'(\alpha) \geq 0$, il faut donc que A'/w' soit une fonction croissante de α. Nous voulons qu'il y ait adoucissement en contrainte (pour des états d'endommagement homogènes). Or le critère en contrainte s'écrivant maintenant $-\frac{1}{2}s'(\alpha)\sigma \cdot \sigma + w'(\alpha) \geq 0$, il faut donc que s'/w' soit une fonction croissante de α. En résumé, les conditions que nous adopterons désormais sont :

$$\textbf{Elasticité positive}^{11} \quad : \quad A(\alpha) > 0, \quad s(\alpha) \equiv A(\alpha)^{-1} > 0; \tag{1.54}$$

$$\textbf{Assouplissement et dissipation} \quad : \quad A'(\alpha) < 0, \quad s'(\alpha) > 0, \quad w'(\alpha) > 0; \tag{1.55}$$

$$\textbf{Ecrouissage en déformation} \quad : \quad w'(\alpha)A''(\alpha) - w''(\alpha)A'(\alpha) > 0; \tag{1.56}$$

$$\textbf{Adoucissement en contrainte} \quad : \quad w'(\alpha)s''(\alpha) - w''(\alpha)s'(\alpha) > 0. \tag{1.57}$$

Remarque 3. *A ce stade de la construction du modèle, il ne faudrait pas croire que ℓ est une longueur intrinsèque au matériau. Ce n'est qu'une longueur de référence que l'on s'est donnée afin de fixer le paramétrage. La notion de longueur caractéristique apparaîtra dans l'analyse de la stabilité des états d'équilibre.*

Le problème d'évolution

Il s'agit maintenant de passer à la question de l'évolution de l'endommagement. Mais, comme nous l'annoncions, nous dérogeons à la règle en ne postulant pas une loi d'évolution au niveau local, mais directement au niveau de la structure. Nous nous replaçons donc dans la situation envisagée dans la section précédente d'une structure dont la configuration de référence naturelle est l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, qui est constituée du matériau endommageable caractérisé par son énergie de déformation (1.53) et qui est soumise à un chargement (dépendant d'un paramètre $t > 0$). Introduisons l'*énergie potentielle*, comme étant toujours la différence entre l'énergie de déformation et le potentiel des efforts extérieurs,

$$\mathcal{P}_t(v, \beta) = \int_\Omega W(\varepsilon(v)(x), \beta(x), \nabla\beta(x))\, dx - f_t(v). \tag{1.58}$$

Remarquons qu'elle exige plus de régularité des champs d'endommagement pour qu'elle soit finie. Nous supposerons donc désormais que l'ensemble $\mathcal{D}$ des champs admissibles est

$$\mathcal{D} = L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^+) \cap H^1(\Omega; \mathbb{R}), \tag{1.59}$$

11. Les inégalités tensorielles sont évidemment comprises au sens des formes quadratiques, par exemple $A(\alpha) > 0$ signifie que $A(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon > 0, \quad \forall \varepsilon \neq 0$.

alors que les champs de déplacements ont toujours la régularité H^1.

Le problème quasistatique d'évolution postulé consiste à chercher, à chaque "instant" t, les champs des déplacements $u_t \in \mathcal{C}_t$ et d'endommagement $\alpha_t \in \mathcal{D}$ vérifiant

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{Problème d'évolution} \\ \\ D\mathcal{P}_t(u_t, \alpha_t)(v - \dot{\mathrm{u}}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0 \qquad \forall (v, \beta) \in \dot{\mathcal{C}}_t \times \mathcal{D} \end{array}} \tag{1.60}$$

Formellement, le problème d'évolution s'écrit donc comme dans le cas d'un modèle non régularisé, cf. (1.20). Mais il conduit évidemment à des solutions différentes du fait que l'énergie de déformation dépend maintenant du gradient d'endommagement. Pour s'en convaincre interprétons ce problème d'évolution. En prenant $\beta = \dot{\alpha}_t$, on réobtient la formulation variationnelle de l'équilibre :

$$\int_\Omega A(\alpha_t)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(v - \dot{\mathrm{u}}_t)\, dx = f_t(v - \dot{\mathrm{u}}_t) \qquad \forall v \in \dot{\mathcal{C}}_t. \tag{1.61}$$

En faisant ensuite $v = \dot{\mathrm{u}}_t$ dans (1.60) on obtient la nouvelle loi d'évolution de α sous forme variationnelle :

$$\int_\Omega \left(\tfrac{1}{2}A'(\alpha_t)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(u_t) + w'(\alpha_t)\right) \beta\, dx + E_0\ell^2 \int_\Omega \nabla\alpha \cdot \nabla\beta\, dx \geq 0 \qquad \forall \beta \in \mathcal{D}, \tag{1.62}$$

avec égalité quand $\beta = \dot{\alpha}_t$ [12]. Après intégration par parties, on peut revenir au niveau local et l'on obtient finalement pour problème d'évolution de α :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \textit{Dans } \Omega & : & \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha}_t \geq 0 \\ \tfrac{1}{2}A'(\alpha_t)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(u_t) + w'(\alpha_t) - E_0\ell^2\Delta\alpha_t \geq 0 \\ \dot{\alpha}_t\Big(\tfrac{1}{2}A'(\alpha_t)\varepsilon(u_t) \cdot \varepsilon(u_t) + w'(\alpha_t) - E_0\ell^2\Delta\alpha_t\Big) = 0 \end{array} \right. \\ \\ \textit{Sur } \partial\Omega & : & \dfrac{\partial \alpha_t}{\partial n} = 0 \end{array}} \tag{1.63}$$

avec la donnée initiale α_0.

On voit que le critère d'endommagement est devenu non local avec l'apparition du terme en $\Delta\alpha$. On voit aussi qu'il apparaît une condition naturelle de nullité du gradient normal d'endommagement sur le bord. On pourrait évidemment forcer d'autres conditions aux limites en imposant soit la valeur de α sur le bord (condition qui apparaîtrait dans $\mathcal{D}$), soit une valeur non nulle de $\partial\alpha/\partial n$ sur le bord en introduisant un terme correspondant dans $\mathcal{P}$. Mais ces considérations très formelles demanderaient à être plus étayées physiquement. Nous nous en tiendrons donc à nos choix implicites initiaux.

12. On utilise le fait que $\mathcal{D}$ est un cône convexe indépendant de t.

1.3.2 Les résultats d'existence, d'unicité et de stabilité

Existence.

En ce qui concerne l'existence de solutions dans les problèmes à forces imposées, il n'y a pas de miracle à attendre du terme régularisé. La structure ne peut supporter que des chargements limités et la notion de charge limite vaut toujours. Nous en voulons pour preuve le simple exemple d'une barre $\Omega = (0, L)$ fixée à une extrémité, soumise à une contrainte σ [13] à l'autre, les forces linéiques étant nulles. L'équilibre imposant que la contrainte soit partout égale à σ, le critère d'endommagement s'écrit, en notant $s(\alpha) \equiv 1/A(\alpha)$ la souplesse :

$$-\tfrac{1}{2}s'(\alpha(x))\sigma^2 + w'(\alpha(x)) - E_0\ell^2\alpha''(x) \geq 0, \qquad p.p.\ dans\ \Omega. \tag{1.64}$$

En intégrant sur Ω, du fait des conditions aux limites $\alpha'(0) = \alpha'(L) = 0$, on obtient :

$$\sigma^2 \leq 2\frac{\langle w' \rangle}{\langle s' \rangle}, \tag{1.65}$$

$\langle f \rangle$ désignant la moyenne de f sur Ω. Mais du fait de l'adoucissement, w'/s' est une fonction décroissante de α. On a donc la majoration suivante :

$$\sigma^2 \leq 2\frac{w'(0)}{s'(0)} \equiv \sigma_0^2, \tag{1.66}$$

σ_0 étant la contrainte critique de premier endommagement dans un essai de traction simple d'intensité croissante. Autrement dit la barre ne peut pas supporter une contrainte plus grande une fois la loi régularisée.

Unicité.

Dans les problèmes où les seules données non nulles sont des données en déplacement, la question de charge limite ne se pose pas (nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe sur la stabilité). Il s'agit par contre de voir si la régularisation a amélioré la question de l'unicité. Pour cela, on reprend le problème de traction simple d'une barre $\Omega = (0, L)$ mais en contrôlant maintenant le déplacement de l'extrémité L, l'autre extrémité étant maintenue fixe, ce qui conduit aux conditions aux limites

$$u_t(0) = 0, \qquad u_t(L) = tL. \tag{1.67}$$

Afin de faciliter les calculs, nous prenons pour fonction $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$:

$$\alpha \in [0, \infty), \qquad A(\alpha) = \frac{E_0}{(1+\alpha)^2}, \qquad w(\alpha) = \frac{\sigma_0^2}{E_0}\,\alpha, \tag{1.68}$$

σ_0 s'interprétant comme la contrainte de premier endommagement, mais donc aussi comme nous l'avons vu comme la contrainte limite supportable par le matériau. Sachant que, pour des raisons d'équilibre, la contrainte est nécessairement uniforme dans la barre,

$$\sigma(x, t) = \sigma_t, \quad \forall x \in (0, L), \tag{1.69}$$

13. Il faudrait évidemment parler dans ce cas de force, mais pour ne pas changer de notations on les assimile à des contraintes

Le problème d'évolution consiste à trouver, pour $t > 0$ et $x \in (0, L)$, σ_t et $\alpha_t(x)$ tels que

$$\dot{\alpha}_t(x) \geq 0 \tag{1.70}$$
$$E_0^2 \ell^2 \alpha_t''(x) + \sigma_t^2 \alpha_t(x) - \sigma_0^2 + \sigma_t^2 \leq 0 \tag{1.71}$$
$$\dot{\alpha}_t(x) \left(E_0^2 \ell^2 \alpha_t''(x) + \sigma_t^2 \alpha_t(x) - \sigma_0^2 + \sigma_t^2 \right) = 0 \tag{1.72}$$
$$\alpha_t'(0) = \alpha_t'(L) = 0, \tag{1.73}$$
$$\alpha_0(x) = 0 \tag{1.74}$$
$$\sigma_t \int_0^L (1 + \alpha_t(x))^2 \, dx = t E_0 L, \tag{1.75}$$

cette dernière relation ne faisant que traduire la donnée de la déformation moyenne du fait des conditions aux limites en déplacement [14].

Avant de construire des solutions, on peut remarquer que dans un intervalle où le seuil d'endommagement est atteint (égalité dans(1.71)), la répartition de l'endommagement est de la forme

$$\alpha_t(x) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} - 1 + a_t \sin \frac{\sigma_t x}{E_0 \ell} + b_t \cos \frac{\sigma_t x}{E_0 \ell}. \tag{1.76}$$

Au début, la réponse est évidemment élastique et on a

$$\sigma_t = t E_0, \qquad \alpha_t(x) = 0, \qquad \textit{quand} \quad 0 \leq t \leq t_0 \equiv \frac{\sigma_0}{E_0}. \tag{1.77}$$

A l'instant t_0 tous les points de la barre ont atteint le seuil d'endommagement (égalité dans(1.71)) et sont donc susceptibles de s'endommager. On va envisager plusieurs cas à partir de cet instant.

1. **La solution uniforme.** Si tous les points s'endommagent ((égalité dans(1.71) pour tout x), alors, compte tenu des conditions aux limites (1.73), on a nécessairement un endommagement uniforme et on trouve la solution que l'on qualifiera d'homogène :

$$\sigma_t = \sigma_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{1/3}, \qquad \alpha_t(x) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} - 1. \tag{1.78}$$

2. **La croissance d'un pustule.** Cherchons maintenant une solution où la barre s'endommage sur un intervalle de longueur (variable) $2L_t$ centré en un point (fixe) arbitraire x_0. Dans ce cas, comme α_t est nul à l'extérieur de ce segment, par raison de continuité on a α_t et α_t' nuls aux extrémités du segment. On tire alors de (1.76)

$$\alpha_t(x) = 2 \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} - 1 \right) \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{x - x_0}{L_t}, \qquad L_t = \pi \frac{E_0}{\sigma_t} \ell, \tag{1.79}$$

répartition d'endommagement que l'on qualifiera, du fait de sa forme et de sa nocivité, de *pustule de largeur* $2L_t$ *centré en* x_0. D'autre part (1.75) fournit la relation (implicite) entre σ_t et t :

$$t = t_0 \frac{\sigma_t}{\sigma_0} + \pi \frac{\ell}{L} \left(3 \frac{\sigma_0^4}{\sigma_t^4} - 2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} - 1 \right). \tag{1.80}$$

14. Le lecteur perspicace n'aura pas manqué de noter que (1.75) n'est qu'une combinaison des deux conditions aux limites en déplacement. La deuxième condition ne sert qu'à éliminer la translation d'ensemble.

Pour que la condition d'irréversibilité (1.70) soit satisfaite, il faut et il suffit que σ_t soit une fonction décroissante de t. D'après (1.80) cela équivaut à $t_0 L \leq 8\pi\ell$. Enfin il suffit de s'assurer que cet intervalle est contenu dans $(0, L)$ pour que l'on ait construit une solution. Remarquons à cet effet que le pustule a une largeur initiale $2L_{t_0} = 2\pi\ell/t_0$ non nulle et indépendante de x_0, ce qui exige que la longueur de la barre lui soit supérieure pour qu'il puisse naître. Si c'est le cas, en prenant x_0 suffisamment proche du milieu de la barre, on a construit une autre solution que la solution uniforme au problème d'évolution, tout du moins pour t voisin de t_0. En fait, on en a même construit une infinité puisque l'on a le choix du centre du pustule.

FIGURE 1.1 – *Croissance d'un pustule au milieu de la barre.*

Avec le temps, ce pustule va s'étendre (L_t croît) et s'amplifier (α_t croît), cf Figure 1.1. Il va atteindre un des deux bords (0 si $x_0 \leq L/2$, L si $x_0 \geq L/2$) à un instant $t(x_0)$ dépendant de la position du centre —instant que l'on calcule à l'aide de $(1.79)_2$ et (1.80) sachant que la demi-largeur du pustule vaut alors x_0 ou $L - x_0$. Il peut alors continuer à évoluer tout en gardant sa forme de pustule mais moyennant un déplacement de son centre. Par exemple, si $x_0 < L/2$, alors le pustule devient

$$\alpha_t(x) = 2\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\sin^2\frac{\pi x}{2L_t}, \tag{1.81}$$

sa largeur continuant de croître suivant la loi $(1.79)_2$ et la relation $\sigma_t - t$ restant inchangée. Cette évolution est admissible tant que le pustule n'atteint pas l'autre extrémité, ce qui advient à l'instant t_1, indépendant du centre initial du pustule, tel que $2L_{t_1} = L$, la contrainte valant alors $\sigma_{t_1} = 2\pi E_0\ell/L$. A cet instant-là, et ce quel que soit son point de départ, le pustule occupe toute la barre dont l'état d'endommagement est alors

$$\alpha_{t_1}(x) = 2\Big(\Big(\frac{t_0 L}{2\pi\ell}\Big)^2 - 1\Big)\sin^2\frac{\pi x}{L}. \tag{1.82}$$

Le seuil d'endommagement étant alors atteint partout, on se retrouve dans une situation identique à celle de l'instant t_0 à ceci près que l'état d'endommagement "initial" n'est plus uniforme. On pourrait continuer la construction d'une (ou plusieurs) solution(s) au problème d'évolution en envisageant de nouveaux pustules se superposant à l'ancien. Nous laissons le soin au lecteur de détailler les calculs.

En résumé, si $2\pi\ell < t_0 L \leq 8\pi\ell$, on sait construire une infinité (indexée par x_0) de solutions au problème d'évolution sur l'intervalle de chargement $[0, t_1]$. Remarquons toutefois que si ces solutions diffèrent par leur répartition spatio-temporelle de l'endommagement, elles conduisent toute à la même relation force-déplacement, d'après (1.80).

3. **La croissance de plusieurs pustules.** Pour construire d'autres solutions donnant lieu à des relations force-déplacement différentes, on peut utiliser plusieurs pustules, on peut même envisager des demi-pustules aux extrémités, cf Figure 1.2.

   En effet, pour qu'il puisse en naître simultanément à l'instant t_0, il suffit que la barre soit suffisamment longue. Par exemple, en espaçant leur centre régulièrement, si $t_0 L > 2n\pi\ell$ on peut

FIGURE 1.2 – *Croissance d'un demi-pustule au début de la barre.*

en mettre n de forme identique à (1.79). La relation $\sigma_t - t$ devient alors

$$t = t_0 \frac{\sigma_t}{\sigma_0} + n\pi \frac{\ell}{L} \left(3\frac{\sigma_0^4}{\sigma_t^4} - 2\frac{\sigma_0^2}{\sigma_t^2} - 1 \right), \tag{1.83}$$

la condition de décroissance de σ_t devenant $t_0 L \leq 8n\pi\ell$. Ces pustules occuperont toute la barre à l'instant t_n tel que $2nL_{t_n} = L$ et donc lorsque $\sigma_{t_n} = 2n\pi E_0 \ell / L$.

Stabilité des états homogènes.

Nous avons vu que dans les modèles non régularisés avec adoucissement, sous contrôle des forces volumiques, tout état de la structure tel que le seuil d'endommagement est atteint sur un ensemble de mesure non nulle est instable. On peut espérer que le terme en gradient va arranger les choses. Pour le voir, nous allons étudier la stabilité des *états homogènes*, *i.e.* ceux tels que les déformations et l'endommagement ne dépendent pas du point x. D'un point de vue pratique, la stabilité de tels états est essentielle pour l'identification expérimentale de la loi de comportement, *i.e.* des fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$.

Commençons par nous assurer que ces états sont possibles malgré la présence du terme en gradient d'endommagement. Considérons une structure Ω n-dimensionnelle dont les déplacements des points de la frontière sont contrôlés de façon à ce qu'une déformation homogène soit possible, *i.e.* on impose $u_t(x) = t\varepsilon_0 x$ sur $\partial\Omega$, ε_0 étant une matrice symétrique $n \times n$ donnée. Les forces volumiques sont nulles et la structure est à l'instant $t = 0$ dans un état d'endommagement uniforme α_0. Il est alors facile de vérifier que la réponse homogène $u_t(x) = t\varepsilon_0 x$ et $\alpha_t(x) = \alpha_t$ dans Ω, avec $\alpha_t = \alpha_0$ tant que $t < t_0 \equiv (-2w'(\alpha_0)/A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ et α_t égal à l'unique solution de $t^2 A'(\alpha)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + 2w'(\alpha) = 0$ dès que $t \geq t_0$, est solution du problème d'évolution. Comme α_0 et ε_0 peuvent être choisis arbitrairement, on voit donc que l'on peut envisager n'importe quel état homogène de la structure dans la mesure où il vérifie le critère. Donnons nous donc α_0, ε_0 et σ_0 tels que

$$\sigma_0 = A(\alpha_0)\varepsilon_0, \qquad \tfrac{1}{2}A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + w'(\alpha_0) \geq 0, \tag{1.84}$$

il s'agit de voir si l'état homogène associé $u(x) = \varepsilon_0 x$, $\alpha(x) = \alpha_0$ est stable. Remarquons que suivant que l'inégalité dans $(1.84)_2$ est stricte ou qu'il y a égalité, le seuil d'endommagement sera atteint nulle part ou partout dans la structure. Les premiers états (avec inégalité stricte) sont dits *élastiques*, alors que les deuxièmes (avec égalité) sont dits *en phase d'endommagement.* Comme nous l'avons signalé, la propriété de stabilité d'un état dépend du type de contrôle exercé sur la structure. Nous allons donc envisager deux cas :

– **Cas des forces surfaciques contrôlées.** Les forces surfaciques sont maintenues à la valeur $\sigma_0 n(x)$, $n(x)$ étant la normale unitaire sortante en x à $\partial\Omega$, autrement dit on a

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 = H^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \text{ [15]} \qquad f(v) = \int_{\partial\Omega} \sigma_0 n \cdot v \, d\Gamma. \tag{1.85}$$

– **Cas des déplacements surfaciques contrôlés.** Le déplacement d'un point de la frontière est maintenu à la valeur $\varepsilon_0 x$, autrement dit on a

$$\mathcal{C} = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : v(x) = \varepsilon_0 x \ sur \ \partial\Omega\}, \qquad \mathcal{C}^0 = H^1_0(\Omega, \mathbb{R}^n), \qquad f = 0. \tag{1.86}$$

Dans les deux cas l'ensemble des états d'endommagement accessibles est

$$\mathcal{D} = \alpha_0 + \mathcal{D}^0, \qquad \mathcal{D}^0 = H^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+). \tag{1.87}$$

Remarquons que $\mathcal{D}^0$ est dense dans $\bar{\mathcal{D}}^0 = \{\beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \ : \ \beta \geq 0\}$. L'énergie potentielle s'écrit :

$$\mathcal{P}(v, \beta) = \int_\Omega \Big(\tfrac{1}{2} A(\beta)\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) + w(\beta) + \tfrac{1}{2} E_0 \ell^2 \nabla\beta \cdot \nabla\beta \Big) dx - f(v). \tag{1.88}$$

Elle est 2 fois Fréchet différentiable en (u, α), sa dérivée première en l'état (u, α) est la forme linéaire $\mathcal{P}'$ suivante :

$$\mathcal{P}'(v, \beta) = \Big(\tfrac{1}{2} A'(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + w'(\alpha_0) \Big) \int_\Omega \beta dx. \tag{1.89}$$

Remarquons qu'elle est nulle si (u, α) est un état homogène en phase d'endommagement et strictement positive si (u, α) est un état homogène en phase élastique et si β est non nul. La dérivée seconde en l'état (u, α) est une forme quadratique $\mathcal{P}''$ qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{P}''(v, \beta) \quad = \quad & \int_\Omega A(\alpha_0)\Big(\varepsilon(v) - \beta s'(\alpha_0)\sigma_0\Big) \cdot \Big(\varepsilon(v) - \beta s'(\alpha_0)\sigma_0\Big) \, dx \\ & - \Big(\tfrac{1}{2} s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) \Big) \int_\Omega \beta^2 dx + E_0 \ell^2 \int_\Omega \nabla\beta \cdot \nabla\beta \, dx, \end{aligned} \tag{1.90}$$

en notant $s = A^{-1}$. Remarquons que le premier et le troisième termes sont positifs alors que le deuxième (avec le signe $-$) est négatif compte tenu de la condition d'adoucissement.

En utilisant ces deux dérivées dans un développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle autour de l'état (u, α), il vient

$$\mathcal{P}(u + hv, \alpha + h\beta) - \mathcal{P}(u, \alpha) = h\mathcal{P}'(v, \beta) + \tfrac{1}{2} h^2 \mathcal{P}''(v, \beta) + o(h^2), \tag{1.91}$$

pour toute direction $(v, \beta) \in \mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}^0$ de norme 1. Pour établir des résultats de stabilité nous allons raisonner sur le signe de la somme des deux premiers termes du second membre. Si l'on peut trouver une direction admissible (v, β) et $h > 0$ tels que cette somme soit négative alors l'état sera instable. Si elle est strictement positive pour toute direction admissible (v, β) admissible de norme 1 et pour h assez petit, alors nous conclurons à la stabilité de l'état [16].

Considérons tout d'abord un état homogène élastique. Soit $h > 0$ assez petit. Si $\beta \not\equiv 0$, alors d'après la positivité de $\mathcal{P}'$, le second membre est strictement positif. Si $\beta \equiv 0$, alors $\mathcal{P}''(v, 0)$ est strictement positif pour tout v (non rigide). Nous conclurons donc à la stabilité des états homogènes élastiques.

15. On le quotientera par les déplacements rigides afin que la norme L^2 des déformations soit une norme équivalente à la norme H^1 des déplacements.

16. En toute rigueur, la stricte positivité ne suffit pas, mais nous nous en contenterons.

Considérons maintenant un état homogène en phase d'endommagement et envisageons les deux types de contrôle.

• **Cas des forces surfaciques contrôlées.** La dérivée première est identique nulle. Considérons la direction (v, β) suivante :

$$\beta(x) = \lambda > 0, \qquad v(x) = \lambda s'(\alpha_0)\sigma_0 x, \tag{1.92}$$

λ étant choisi de façon à ce qu'elle soit de norme 1. La dérivée seconde vaut alors

$$\mathcal{P}''(v, \beta) = -\Big(\tfrac{1}{2}s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0)\Big)\lambda^2 vol(\Omega) < 0. \tag{1.93}$$

Par conséquent on a la

Proposition 5. *Les états homogènes en phase d'endommagement sous forces surfaciques contrôlées sont* **instables**.

Autrement dit le terme régularisé ne change pas le résultat !

• **Cas des déplacements surfaciques contrôlés.** La dérivée première étant identique nulle, il s'agit d'étudier le signe de la dérivée seconde. Pour cela considérons le quotient de Rayleigh défini quand $\beta \not\equiv 0$ par

$$\mathcal{R}(v, \beta) = \frac{\int_\Omega \Big(A(\alpha_0)\big(\varepsilon(v) - \beta s'(\alpha_0)\sigma_0\big) \cdot \big(\varepsilon(v) - \beta s'(\alpha_0)\sigma_0\big) + E_0 \ell^2 \nabla\beta \cdot \nabla\beta\Big) dx}{\int_\Omega \beta^2 \, dx} \tag{1.94}$$

et prolongé par $+\infty$ quand $\beta \equiv 0$. Posons

$$\lambda(\alpha_0, \varepsilon_0, \Omega) \equiv \inf_{\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}^0} \mathcal{R} = \min_{\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0} \mathcal{R}. \tag{1.95}$$

L'infimum sur $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{D}^0$ coïncide avec celui sur $\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0$ par densité. Sur $\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0$ l'infimum est atteint et est donc un minimum. En effet, considérons une suite minimisante (v_n, β_n). Du fait de l'homogénéité du quotient on peut la choisir telle que $\int_\Omega \beta_n^2 \, dx = 1$. Comme le numérateur est décroissant avec n, β_n et v_n sont bornés dans H^1. On peut donc en extraire une sous-suite convergeant faiblement dans H^1 et donc fortement dans L^2 vers (v_∞, β_∞) qui est dans $\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0$ puisque ces ensembles sont faiblement fermés dans H^1. Par conséquent $\int_\Omega \beta_\infty^2 \, dx = 1$. Mais par semi-continuité inférieure de la norme on obtient

$$\mathcal{R}(v_\infty, \beta_\infty) \leq \lim_{n \to \infty} \mathcal{R}(v_n, \beta_n) = \inf_{\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0} \mathcal{R},$$

d'où le résultat. Ce minimum est strictement positif. En effet, pour qu'il soit nul il faudrait que $\beta_\infty(x) = Cte \neq 0$ et que $\varepsilon(v_\infty)(x) = Cte \; s'(\alpha_0)\sigma_0 \neq 0$. Or cette deuxième condition est incompatible avec l'appartenance de v_∞ à H_0^1. Notons que ce infimum dépend non seulement de l'état homogène considéré *mais aussi* du domaine Ω. On peut d'ores et déjà en déduire la

Proposition 6. *Les états homogènes en phase d'endommagement sous déplacements surfaciques contrôlés sont*

1. **instables** *si* $\quad 0 < \lambda(\alpha_0, \varepsilon_0, \Omega) < \frac{1}{2}s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0)$;

2. **stables** *si* $\lambda(\alpha_0, \varepsilon_0, \Omega) > \frac{1}{2}s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0) > 0.$

Nous nous proposons maintenant de montrer que la stabilité de tels états tient essentiellement à *la taille* du domaine. Pour cela, nous considérons un état homogène (non trivial) et une famille de domaines homothétiques ne se différenciant que par leur taille :

$$\Omega_L = L\,\Omega_1, \qquad L > 0, \tag{1.96}$$

le domaine Ω_1 servant de référence, sa taille étant normalisée. Moyennant le changement de coordonnées $y = x/L$ on peut renvoyer tous les domaines sur le domaine de référence. On peut aussi renormaliser les déplacements suivant la règle suivante

$$v_L \in H_0^1(\Omega_L, \mathbb{R}^n) \mapsto v \in H_0^1(\Omega_1, \mathbb{R}^n) \quad : \quad v_L(x) = L\,v\big(\frac{x}{L}\big), \tag{1.97}$$

alors que les champs d'endommagement sont simplement transportés $\beta_L(x) = \beta(x/L)$. Ce faisant le quotient de Rayleigh pour la structure Ω_L, que nous noterons $\mathcal{R}_L$, peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{R}_L(v, \beta) = \frac{\displaystyle\int_{\Omega_1} A\big(\varepsilon(v) - \beta e\big) \cdot \big(\varepsilon(v) - \beta e\big)\, dy + E_0 \frac{\ell^2}{L^2} \int_{\Omega_1} \nabla\beta \cdot \nabla\beta\, dy}{\displaystyle\int_{\Omega_1} \beta^2\, dy}, \tag{1.98}$$

en utilisant les notations abrégées

$$A \equiv A(\alpha_0), \qquad e \equiv s'(\alpha_0)\sigma_0,$$

les couples (v, β) vivant dans l'espace fixe $\mathcal{C}^0 \times \bar{\mathcal{D}}^0$ correspondant à Ω_1. A partir de cette écriture, il est évident que $\lambda_L \equiv \lambda(\alpha_0, \varepsilon_0, \Omega_L)$ est une fonction décroissante de L. Étudions son comportement asymptotique lorsque L tend vers 0, puis lorsque L tend vers ∞.

1. $L \to 0$**.** Notons au préalable que le couple (v_L, β_L) réalisant le minimum satisfait :

$$\lambda_L = \mathcal{R}_L(v_L, \beta_L), \tag{1.99}$$

$$1 = \int_{\Omega_1} \beta_L^2\, dy, \tag{1.100}$$

$$0 = \int_{\Omega_1} A\big(\varepsilon(v_L) - \beta_L e\big) \cdot \varepsilon(v)\, dy, \quad \forall v \in \mathcal{C}^0. \tag{1.101}$$

Remarquons que λ_L est majoré uniformément :

$$0 < \lambda_L \leq \mathcal{R}_L(0, 1) = Ae \cdot e. \tag{1.102}$$

Étant fonction décroissante de L, il tend donc vers une limite λ_0 quand L tend vers 0. Mais on tire aussi de (1.99) que v_L est borné dans H^1 et que $\nabla\beta_L$ est borné dans L^2. Par conséquent β_L tend (fortement) dans H^1 vers une constante β_0 qui en vertu de (1.100) est $1/\sqrt{vol(\Omega_1)}$. D'autre part v_L tend faiblement dans H^1 vers v_0 qui en vertu de (1.101) vérifie, pour tout $v \in \mathcal{C}^0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} A\varepsilon(v_0) \cdot \varepsilon(v)\, dy &= \beta_0 e \cdot \int_{\Omega_1} \varepsilon(v)\, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $v_0 = 0$. Regroupons les différentes estimations de λ_0 :

$$Ae \cdot e \leq \lambda_0 \leq \lambda_L \leq Ae \cdot e - \int_{\Omega_1} A\varepsilon(v_L) \cdot e\beta_L \, dy \tag{1.103}$$

où dans la dernière majoration on a tenu compte de la positivité de l'intégrale en $\nabla\beta_L$ et simplifié le terme carré en v_L et β_L grâce à (1.101). Comme $\int_{\Omega_1} A\varepsilon(v_L) \cdot e\beta_L \, dy$ tend vers 0, on obtient $\lambda_0 = Ae \cdot e$ soit explicitement

$$\lim_{L \to 0} \lambda_L = A(\alpha_0)s'(\alpha_0)\sigma_0 \cdot s'(\alpha_0)\sigma_0. \tag{1.104}$$

Mais alors comme on a, en vertu de la propriété d'écrouissage en déformation,

$$A(\alpha_0)s'(\alpha_0)\sigma_0 \cdot s'(\alpha_0)\sigma_0 - \tfrac{1}{2}s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 + w''(\alpha_0) = \tfrac{1}{2}A''(\alpha_0)\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0 + w''(\alpha_0) > 0,$$

on en déduit que les états homogènes sont stables sous déplacements surfaciques contrôlés pour les domaines de taille assez petite. Il reste à voir si cela reste vrai pour les domaines de grande taille. Il faut étudier pour cela le comportement de λ_L lorsque L tend vers l'infini.

2. $L \to \infty$**.** L'étude asymptotique de λ_L lorsque L tend vers l'infini est difficile pour des domaines de dimension supérieure à 1. Intuitivement on peut penser que pour des domaines de grande taille la régularisation ne joue plus, intuition confirmée par le fait que

$$\lim_{L \to \infty} \mathcal{R}_L(v, \beta) = \mathcal{R}_\infty(v, \beta) \equiv \frac{\int_{\Omega_1} A\big(\varepsilon(v) - \beta e\big) \cdot \big(\varepsilon(v) - \beta e\big) \, dy}{\int_{\Omega_1} \beta^2 \, dy},$$

i.e. que le quotient de Rayleigh tend (pour un état donné) vers celui du modèle non régularisé, et donc qu'en vertu du résultat général d'instabilité pressenti on devrait avoir

$$\lim_{L \to \infty} \lambda_L = 0. \tag{1.105}$$

Malheureusement une démonstration générale fait défaut. Elle présente en fait le même degré de difficulté que celle de la Proposition sur l'instabilité des états en phase d'endommagement. Nous nous contenterons de l'établir pour des milieux unidimensionnels.

Soit $\Omega_1 = (0, 1)$ et $L_n = n^2\ell$ une suite de taille tendant vers l'infini. Considérons la suite d'état (v_n, β_n) suivante :

$$\beta_n(y) = \begin{cases} \sqrt{3n}(1 - ny) & si\ 0 \leq y \leq 1/n \\ 0 & sinon \end{cases}, \quad v_n(y) = e \int_0^y \beta_n(\zeta) \, d\zeta - e \langle \beta_n \rangle \, y, \tag{1.106}$$

β_n étant donc un élément de $H^1(0, 1)$ de norme L^2 égale à 1 alors que v_n est le champ optimal associé, cf. (1.101). En reportant dans $\mathcal{R}_{L_n}$ il vient

$$0 \leq \lambda_{L_n} \leq \mathcal{R}_{L_n}(v_n, \beta_n) = \frac{E_0}{n^4} \int_0^1 {\beta'_n}^2 \, dy + Ae^2 \langle \beta_n \rangle^2 = \frac{3E_0}{n^2} + \frac{3Ae^2}{4n}. \tag{1.107}$$

Comme le terme de droite tend vers 0, le résultat suit.

Si l'on admet que ce résultat se généralise à des dimensions supérieures, on a donc montré que λ_L décroissait de $Ae \cdot e$ à 0 et donc qu'il passait nécessairement pour un certain L par la valeur critique $\frac{1}{2}s''(\alpha_0)\sigma_0 \cdot \sigma_0 - w''(\alpha_0)$. On peut donc avancer la

Proposition 7 (Taille critique)**.** *Pour une famille de domaines de forme Ω_1 donnée, il existe une taille critique $L_c(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$ en deçà de laquelle l'état homogène $(\varepsilon_0 x, \alpha_0)$ est stable sous déplacement de la frontière contrôlé et au delà de laquelle il devient instable.*

Ce résultat est intéressant à plus d'un titre :

1. Il nous rassure quant à l'efficience du terme régularisé, puisque c'est la première fois que l'on met en évidence une amélioration sensible par rapport aux modèles non régularisés.
2. Il peut servir au niveau expérimental à identifier une (voire plusieurs) des fonctions caractérisant le modèle, *i.e.* $A(\alpha)$ ou $w(\alpha)$. En effet, en normalisant un essai en choisissant une forme de domaine et un type de chargement, la taille critique d'instabilité ne dépend plus que de ces fonctions. En la mesurant d'une part et en faisant un calcul d'autre part, on obtient une information sur ces fonctions.

<u>Exemple</u>. Pour un milieu unidimensionnel, le calcul de $L_c(\varepsilon_0, \alpha_0, \Omega_1)$ peut se faire explicitement. En prenant $\Omega_1 = (0, 1)$ et en considérant un état homogène en phase d'endommagement *i.e.*

$$\alpha \geq 0, \qquad \varepsilon^2 = -2\,\frac{w'(\alpha)}{A'(\alpha)}, \tag{1.108}$$

on trouve (le détail des calculs est laissé aux soins du lecteur) :

$$\lambda(\varepsilon, \alpha, L\Omega_1) = \min\left\{\frac{2s'(\alpha)w'(\alpha)}{s(\alpha)}; \quad \left(\frac{4\pi^2 s'(\alpha)^2 w'(\alpha)^2 E_0 \ell^2}{s(\alpha)^2 L^2}\right)^{1/3}\right\}. \tag{1.109}$$

D'où l'expression de la longueur critique de la barre en fonction de α :

$$L_c(\alpha)^2 = \frac{4\pi^2 E_0 s'(\alpha)^5 w'(\alpha)^2}{s(\alpha)^2\big(s''(\alpha)w'(\alpha) - s'(\alpha)w''(\alpha)\big)^3}\,\ell^2. \tag{1.110}$$

En reprenant le modèle où

$$A(\alpha) = E_0(1+\alpha)^{-2} \quad et \quad w(\alpha) = \sigma_0^2\alpha/E_0, \tag{1.111}$$

on trouve

$$L_c(\alpha) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}\ell \quad et \quad \varepsilon = \varepsilon_0(1+\alpha)^{\frac{3}{2}} \quad avec \quad \varepsilon_0 \equiv \frac{\sigma_0}{E_0}, \tag{1.112}$$

soit la relation suivante entre la longueur critique et la déformation

$$L_c = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{3}}\ell. \tag{1.113}$$

On notera à ce propos la propriété un peu surprenante de croissance de la longueur critique avec la déformation. Autrement dit, une barre de longueur L plus grande que $4\pi\ell\varepsilon_0$ soumise à une déformation moyenne ε croissante réagira d'abord élastiquement (tant que $\varepsilon \leq \varepsilon_0$), puis, dans une deuxième phase, s'endommagera *mais de façon non homogène* puisque l'état homogène est instable tant que $\varepsilon_0 < \varepsilon < \big(L/4\pi\ell\big)^3\varepsilon_0$. Ce n'est seulement que pour des déformations moyennes assez grandes que l'état homogène devient stable et est donc susceptible d'être observé.

Stabilité et bifurcation.

L'analyse précédente a montré que les états homogènes n'étaient pas toujours stables. La question qui se pose alors est de savoir s'il existe des états stables quel que soit le chargement. Nous n'essaierons pas de répondre à cette question dans le cas général, mais seulement sur un exemple. Reprenons le cas d'une barre constituée du matériau caractérisé par (1.111) de longueur L assez grande, disons

$$L = 2n\frac{\pi\ell}{\varepsilon_0}, \quad \text{n entier “assez grand”}, \tag{1.114}$$

soumise à une déformation moyenne croissante ε. Raisonnons à partir du problème incrémental, en se plaçant au premier pas de temps et en omettant l'indice 1. L'état (u, α) à la fin du pas de temps doit vérifier

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C} = \left\{ v \in H^1(0,L) \ : \ \int_0^L v'(x)dx = \varepsilon L \right\}, \\ \alpha \in \mathcal{D} = H^1((0,L), \mathbb{R}^+), \\ D\mathcal{P}(u,\alpha)(v-u, \beta-\alpha) \geq 0, \quad \forall (v,\beta) \in \mathcal{C}\times\mathcal{D} \end{cases} \tag{1.115}$$

ce qui, une fois tenu compte de l'équilibre, revient à chercher σ (la contrainte dans la barre) et la répartition d'endommagement $\alpha(x)$ tels que :

$$\alpha(x) \geq 0 \tag{1.116}$$

$$E_0^2\ell^2\alpha''(x) + \sigma^2\alpha(x) - \sigma_0^2 + \sigma^2 \leq 0 \tag{1.117}$$

$$\alpha(x)\left(E_0^2\ell^2\alpha''(x) + \sigma^2\alpha(x) - \sigma_0^2 + \sigma^2\right) = 0 \tag{1.118}$$

$$\alpha'(0) = \alpha'(L) = 0, \tag{1.119}$$

$$\sigma\int_0^L (1+\alpha(x))^2\,dx = \varepsilon E_0 L. \tag{1.120}$$

En fait, on peut exhiber toutes les solutions possibles, qui en dehors des états homogènes, se construisent à partir de pustules ou de demi-pustules. Dans un diagramme $\sigma - \varepsilon$, on obtient ainsi une famille de $2n+2$ branches : deux correspondant aux états homogènes (le segment de droite $\sigma/\sigma_0 = \varepsilon/\varepsilon_0$ pour la branche élastique, et, la plus haute dans la Figure 1.3, $\sigma/\sigma_0 = (\varepsilon/\varepsilon_0)^{\frac{1}{3}}$, correspondant à un endommagement homogène), les autres correspondant à $p', 0 < p' \leq n$, pustules répartis dans la barre avec éventuellement un demi-pustule aux extrémités. Chaque pustule comptant pour 2 demi-pustules, en appelant $p, 0 \leq p \leq 2n$, le nombre de demi-pustules, la branche p correspond à la relation $\sigma - \varepsilon$ suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0\frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{p}{4n}\left(3\frac{\sigma_0^4}{\sigma^4} - 2\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right). \tag{1.121}$$

Quelques unes de ces branches sont représentées sur la Figure 1.3, pour $n = 100$. En particulier “la plus basse” correspond à $p = 1$, *i.e.* à un demi-pustule à une extrémité. On remarquera que ε n'y est pas une fonction monotone de σ. Ceci est vrai pour toutes les branches telles que $0 < p < n/2$. Le point $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ est un point de bifurcation duquel partent toutes les branches “endommagées”. Nous savons que la branche élastique est stable, mais par contre que la branche avec endommagement homogène ne l'est pas, tout du moins au voisinage du point de bifurcation.

FIGURE 1.3 – *Branches des éventuels états stables.*

FIGURE 1.4 – *Interprétation graphique de l'énergie potentielle.*

Il s'agit donc de savoir s'il existe des états stables pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ et si oui lesquels. Sans étudier toutes les branches, nous nous proposons de montrer que la branche $p = 1$ est stable pour $\varepsilon > \varepsilon_0$. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle correspond au minimum global de l'énergie potentielle. Le résultat sera évident une fois que l'on aura montré que l'énergie potentielle $\mathcal{P}_1(\epsilon)$ associé à un point d'abscisse ϵ de cette branche correspond à l'aire comprise entre la branche élastique, la branche $p = 1$, l'axe des ε et la droite $\varepsilon = \epsilon$, *i.e.* à l'aire grisée de la Figure 1.4. En effet, imaginons un chemin de déformation moyenne $t \mapsto \varepsilon(t)$ faisant passer de $\varepsilon(0) = 0$ à $\varepsilon(1) = \epsilon$ de façon à ce que l'état d'équilibre associé soit la contrainte $\sigma(t)$ et que $(\varepsilon(t), \sigma(t))$ décrive la branche élastique puis l'arc de la branche bifurquée $p = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1(\epsilon) &= \textstyle\int_0^L W(u'(x), \alpha(x), \alpha'(x))\, dx && \text{par définition} \\
&= \textstyle\int_0^L \int_0^1 \dot{W}(u_t'(x), \alpha_t(x), \alpha_t'(x))\, dtdx \\
&= \textstyle\int_0^L \int_0^1 \sigma(t)\dot{u}_t'(x)\, dtdx && \text{grâce à (1.118)} \\
&= \textstyle\int_0^1 \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) L\, dt && \text{grâce à (1.120)}
\end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat cherché (à un coefficient multiplicatif de normalisation près). La conclusion est alors facile. En effet, le minimum global est à chercher parmi les états vérifiant la condition d'optimalité (1.115). Il se trouve donc sur une des $2n+1$ branches bifurquées. Mais comme la branche $p = 1$ est la plus basse, le minimum s'y trouve.

Par conséquent, si on adopte ce scénario, on voit qu'une fois la déformation critique ε_0 passée, la barre va brusquement s'endommager avec une répartition d'endommagement correspondant à un demi-pustule de largeur et d'amplitude finies à une extrémité (il n'y a pas unicité, les deux extrémités sont équivalentes).

Minimum local ou minimum global ?

Les raisonnements précédents peuvent-ils se généraliser ? La question est en fait double :

1. Existe-t-il toujours un minimum global ?
2. Si oui, est-ce l'état stable à retenir ?

La réponse à la première partie de la question est manifestement non quand on travaille à forces contrôlées non nulles. Mais même à déplacements (surfaciques) imposés et à forces volumiques nulles, la réponse n'est pas triviale dès lors qu'on est en dimension supérieure à 1. En effet, lorsque $n = 1$, on bénéficie de l'injection (continue) de $H^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$ et on peut conclure relativement facilement à l'existence d'un minimum de l'énergie potentielle avec le minimiseur (u, α) dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Par contre, en dimension supérieure, ne bénéficiant plus de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$, on peut simplement montrer que, pour une suite minimisante (u_n, α_n), α_n est bornée dans $H^1(\Omega)$. MAis ne l'étant pas forcément dans $L^\infty(\Omega)$, on n'est plus assuré à partir de l'estimation de l'énergie élastique que u_n est bornée dans $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Deux voies s'offrent alors :

1. soit on travaille sur des espaces de Sobolev avec poids, ce qui complique sérieusement l'analyse mathématique et oblige de toute façon à raisonner au cas par cas ;
2. soit on borne supérieurement (de façon arbitraire) la variable d'endommagement, ce qui revient à interdire un endommagement total du matériau, ce dernier gardant toujours une réserve d'élasticité.

C'est la deuxième solution qui est adoptée dans [11], tout en sachant que cela n' a aucune influence sur la convergence vers un modèle de rupture.

Quant à la deuxième question, elle fait l'objet de multiples polémiques. Les tenants avancent l'"argument" que, faute de mieux, c'est encore ce qu'il y a de plus simple à faire. Les sceptiques se refusent à ce choix formel en objectant que l'accession au minimum global peut nécessiter de franchir de hautes barrières d'énergie. Mais ni les uns, ni les autres n'ont à ce jour faits d'études sérieuses (même dans des cas simples) permettant de trancher. La réponse reste donc en suspens, tout en sachant toutefois que les principaux résultats précis d'existence et de convergence établis à ce jour l'ont été en raisonnant sur le minimum global.

1.3.3 La convergence vers un modèle de rupture fragile

Il resterait à étudier ce qu'il se passe lorsque l'on fait tendre la taille du domaine vers l'infini. Le modèle régularisé converge-t-il vers le modèle non régularisé ou vers le modèle de rupture ? Il semble qu'il n'y ait pas à l'heure actuelle une réponse générale précise et qu'il faille raisonner au cas par cas. La preuve de la convergence de certains modèles d'endommagement régularisés vers un modèle de rupture est faite dans [11] et ne sera pas détaillée ici, le lecteur intéressé étant renvoyé à [11] et [23] (documents joints) et à toute la littérature abondante sur ce sujet citée dans ces documents. Soulignons toutefois quelques points.

1. Les résultats de convergence sont démontrés uniquement dans le cas où le champ de déplacement est scalaire (problèmes 1D ou problèmes antiplans). Le cas vectoriel restant pour le moment hors de portée pour des raisons techniques expliquées dans [23].
2. La convergence est établie au sens de la Γ-convergence, *i.e.* en raisonnant sur les *minima globaux*. Il n'y a pas forcément (et même en général il n'y a pas) convergence de tous les minima locaux et donc de tous les états stables.
3. Tout modèle d'endommagement régularisé ne converge pas vers un modèle de rupture. En particulier, à travers les cas traités, il semble qu'il faille faire dépendre l'énergie dissipée du petit paramètre pour avoir une chance de convergence.
4. Beaucoup de modèles d'endommagement régularisés convergent vers le même modèle de rupture, cf [2], [8] et [44] pour quelques exemples (les démonstrations y étant établies dans le cadre de la segmentation d'image et donc sans le souci de fissuration au bord).
5. Il faut prendre de grandes précautions au bord du domaine si l'on veut trouver des résultats raisonnables. En effet, si l'on ne travaille pas sur un domaine un peu plus grand que le domaine réel, on évalue mal ce qui tendra à la limite vers l'énergie de surface lorsque l'endommagement se développe au bord. En fait on risque de n'en compter que la moitié ce qui revient à prendre une ténacité deux fois moindre à l'interface domaine-extérieur et donc à favoriser l'émergence de fissures dans ces zones-là. C'est d'ailleurs visible dans la section précédente, puisque le minimum correspondait de ce fait à un demi-pustule à une extrémité. Une analyse précise de cette question délicate est faite dans [11].

Chapitre 2

La théorie de Griffith de la rupture fragile revisitée

Résumé.

Ce chapitre est consacré à une analyse critique de la théorie de Griffith. En gardant les deux ingrédients de base de la théorie à savoir le point de vue énergétique et la notion d'énergie de surface, on propose une formulation du problème d'évolution basée sur un principe de minimisation d'énergie. Cette "nouvelle" formulation (en fait simple extension de la précédente) a le mérite de s'affranchir d'hypothèses en général trop restrictives sur le trajet spatio-temporel de la fissuration. Elle permet surtout (mais ceci est lié à cela), comme le montrent plusieurs exemples traités de façon exhaustive, de prédire l'apparition de la fissuration, même dans une structure saine.

2.1 Introduction

L'objet de la mécanique de la rupture est de déterminer l'évolution de la ou des fissures dans un milieu continu en fonction du chargement auquel il est soumis. La mécanique de la rupture *fragile* se limite à l'étude de la fissuration des milieux continus *élastiques* — vision idéaliste, certes, mais aussi cadre dans lequel la plupart des résultats tangibles existants ont été établis. C'est ce cadre que l'on adopte dans cet article. La théorie aujourd'hui en vigueur, repose sur les idées de Griffith, cf. [24], qui, d'une part, attribua une énergie de surface aux fissures et, d'autre part, proposa comme critère de propagation des fissures un critère basé sur un bilan d'énergie. Dans le cadre purement élastique adopté, cette énergie de surface est l'analogue de l'énergie de tension superficielle dans les liquides. Le critère, quant à lui, stipule qu'une fissure se propage si l'énergie que restituerait le milieu lors d'un accroissement virtuel infinitésimal de la fissure compense l'énergie de surface que nécessiterait sa création, et que, au contraire, la fissure ne s'agrandit pas si cette restitution n'est pas suffisante. Il restait à formaliser ces concepts pour pouvoir les utiliser dans des situations générales. L'essentiel de la théorie — qui sera appelée désormais la théorie de Griffith et le critère de propagation afférent le critère de Griffith — fut développée et pratiquement achevée dans les années soixante, cf. [37] dont en particulier [47] et [45]. Rappelons-en les grandes lignes. Les grandeurs fondamentales sont le taux de restitution d'énergie G et la densité d'énergie de surface — notée tantôt 2γ, tantôt G_c, et ... k dans cet article —, le critère de propagation de Griffith exigeant alors que l'on ait à chaque instant [1]

$$G \leq k \tag{2.1}$$

et qu'il n'y ait pas propagation tant que l'inégalité est stricte. L'utilisation de ce critère passe par une définition précise et rigoureuse de G, ce qui pose quelques difficultés. Considérons pour simplifier un milieu bidimensionnel contenant une fissure rectiligne susceptible de se propager en ligne droite. En statique — cadre adopté désormais — G est alors défini comme la dérivée de l'énergie potentielle F du milieu en équilibre sous un chargement donné par rapport à la longueur de la fissure. Si un sens mathématique précis à cette dérivée d'une grandeur (l'énergie) par rapport à un domaine variable (le milieu fissuré) n'a été donné que plus tard dans [15], son expression sous forme d'intégrale indépendante du contour avait été proposée par Rice, cf. [46]. Le lien entre G et la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dont en particulier les fameux facteurs d'intensité des contraintes, cf. par exemple [12], fut établi par Irwin pour un milieu bidimensionnel élastique linéaire (localement) homogène et isotrope, cf. [29] et [30]. Ceci avait l'avantage de permettre d'exprimer le critère en terme des facteurs d'intensité des contraintes, mais eut aussi l'inconvénient de focaliser l'attention sur la question des singularités et de faire perdre le point de vue énergétique initial de Griffith. Si la généralisation de la définition de G à des milieux élastiques quelconques (hétérogènes ou anisotropes ou tridimensionnels) contenant des fissures de forme arbitraire ne présente pas de difficultés majeures — tout du moins sur le plan des principes —, la généralisation de la formule d'Irwin, par contre, n'a pas encore été clairement établie, faute d'une connaissance suffisante des singularités.

L'objet de cet article n'est pas de discuter la définition et les formes possibles de G, mais, en se plaçant dans des situations où toutes les quantités ont un sens, de discuter des capacités de la théorie de Griffith à rendre compte de l'évolution des fissures. Ainsi, en considérant un milieu bidimensionnel,

1. L'écriture du critère est très souvent entourée d'un flou artistique dans la littérature : tantôt on le trouve écrit comme ici, tantôt on autorise l'inégalité $G > k$, la propagation étant alors dite instable.

en supposant le trajet de la fissure connu *a priori* et en admettant que l'énergie potentielle F est une fonction dérivable de la longueur ℓ de la fissure, le problème régissant l'évolution de cette longueur en fonction du temps t s'écrit, suivant Griffith :

$$\textit{Trouver } t \mapsto \ell(t) \textit{ tel que} \quad \ell(0) = \ell_0, \quad \frac{d\ell}{dt}(t) \geq 0, \quad -\frac{\partial F}{\partial \ell}(\ell(t), t) \leq k \quad \textit{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \ell}(\ell(t), t) + k\right) \frac{d\ell}{dt}(t) = 0, \tag{2.2}$$

où la dépendance explicite de F en t provient de la dépendance en temps du chargement et les différentes conditions correspondent respectivement à la condition initiale, à l'irréversibilité de la fissuration, au critère $G \leq k$ et à la condition de non propagation tant que la restitution d'énergie n'est pas suffisante.

C'est cette formulation qu'utilisent les ingénieurs préoccupés de sûreté pour évaluer le risque de propagation d'un défaut existant ou supposé dans une structure en service. Si elle connut et connaît encore un succès certain, elle présente toutefois quelques lacunes fâcheuses. Énonçons-les avant de les examiner.

1. La première concerne l'*initiation* de la fissuration : **la théorie de** Griffith **est fondamentalement inapte à rendre compte de l'apparition de fissures**.
2. La deuxième concerne le *trajet spatial* de la fissuration : **la théorie de** Griffith **n'est pas capable à elle seule de déterminer le trajet spatial des fissures**.
3. La troisième concerne le *trajet temporel* de la fissuration : **la théorie de** Griffith **ne sait traiter de façon satisfaisante que les évolutions progressives des fissures**.

Ces insuffisances de la théorie de Griffith sont pour l'essentiel connues de longue date et de multiples aménagements — voire ravalements — y ont été apportés pour y remédier. Examinons-les.

1. **Le problème de l'amorçage**. Bien que la validité de notre affirmation soit connue, illustrons-la de façon schématique sur un exemple [2] et considérons un milieu bidimensionnel élastique linéaire homogène et isotrope, contenant une fissure rectiligne de longueur ℓ et soumis à un chargement d'intensité t sollicitant la fissure en mode I. Pour une fissure de petite taille, le facteur d'intensité des contraintes K_{I} est de l'ordre de $t\sqrt{\ell}$ et donc d'après la formule d'Irwin G est de l'ordre de $t^2\ell$. Le critère de Griffith dit donc qu'une fissure de longueur initiale ℓ se propagera pour un chargement de l'ordre de $1/\sqrt{\ell}$. En faisant tendre ℓ vers 0, on en conclut que si le milieu n'est pas initialement fissuré, aucune fissure ne pourra apparaître sous chargement fini [3]. Pour pouvoir rendre compte de l'apparition de la fissuration, la démarche généralement suivie consiste à abandonner l'hypothèse d'élasticité pour le matériau et d'introduire une loi de comportement inélastique susceptible de "dégénérer" en fissuration. C'est en particulier avec cet objectif qu'est née la mécanique de l'endommagement, cf. [36], la notion de zone endommagée venant remplacer celle de fissures. Il est effectivement possible de construire des lois d'endommagement de façon à ce qu'un milieu s'endommage même en partant d'un milieu sain, et, moyennant l'introduction de longueur caractéristique dans les modèles, de concentrer l'endommagement sur des zones de faibles épaisseurs ce qui permet de les assimiler à des fissures. En procédant ainsi l'objectif semble atteint et le premier défaut de la théorie de Griffith levé [4]. Mais une

2. cf. la section 2.4.3 pour des résultats précis.
3. Ce résultat est à moduler suivant la présence ou non de singularités fortes dans le problème d'élasticité initial, cf. 2.4.3.
4. En contrepartie, le milieu ne comporte plus véritablement de fissures, ce qui n'est pas forcément réaliste.

question de fond demeure : Que représentent ces variables d'endommagement et d'où sortent leurs lois d'évolution ? Prenons par exemple un matériau composite à inclusions, fragile, dans lequel l'endommagement correspond à de la microfissuration, *i.e.* des fissures de taille comparable à celle des granulats [5]. Comme les défauts sont des fissures, on pourrait — voire on devrait — traiter directement le problème de l'évolution de ces fissures plutôt que passer par l'approche réductrice de modèle d'endommagement qui ne saura que représenter imparfaitement leur influence. La seule question serait alors de savoir si ces fissures suivent ou non la théorie de Griffith. Mais, si on adopte cette théorie, on est obligé, compte tenu de l'incapacité de celle-ci à créer des fissures, de supposer qu'il en existe initialement, ce qui nous ramène au point de départ. D'un autre côté, que se passe-t-il lorsqu'on "oublie" que ces défauts sont des microfissures et qu'on les glisse adroitement dans un modèle d'endommagement ? Comment se fait-il qu'en invoquant les concepts de contrainte effective, de potentiel de dissipation et de matériau standard généralisé, on peut magiquement en faire apparaître ? Le tour de passe-passe est évidemment dans le choix de la loi d'évolution de l'endommagement — et donc des microfissures ! — qui est implicitement fait dans ces présentations formelles et qui ne peut manifestement qu'être en contradiction avec la théorie de Griffith. Autrement dit cette façon de faire revient à adopter la loi de Griffith pour les macrofissures et à y renoncer pour les microfissures. Mais pourquoi adopterait-on pour ces dernières une loi différente de celle régissant l'évolution des premières ? Le découpage micro-macro n'est-il pas qu'une vue de l'esprit ? Les fissures faisant 1/10 de granulat obéissent-elles à des lois différentes de celles qui font 10 granulats ? Toujours est-il, qu'on le dise ou non, il faut de toute façon abandonner le critère Griffith si l'on veut rendre compte de l'apparition de fissures. Mais, quitte à le faire, ne peut-on pas faire l'économie d'une théorie préalable de l'endommagement ? C'est le parti — disons même le pari — que nous prenons dans cet article.

2. **Le problème des trajets spatiaux**. Précisons notre affirmation pour un milieu bidimensionnel. Si l'on ne fait aucune hypothèse *a priori* sur le trajet que suivra la fissure [6], on a alors à déterminer *deux* fonctions du temps — par exemple la position $(x_1(t), x_2(t))$ de la pointe de la fissure — et non plus une seule. Comme le critère de Griffith ne fournit qu'une relation, il faut en introduire une deuxième. Autrement dit, si l'on veut envisager des branchements, *i.e.* des discontinuités de la tangente, on est obligé d'introduire un critère de branchement en plus du critère de propagation de Griffith, ce dernier disant seulement *quand* la propagation a lieu alors que le premier aura en charge de dire *comment*. Son choix donna lieu à des débats passionnés, voire de violentes polémiques, cf. [5], [32] et [6] pour une analyse approfondie pour des milieux bidimensionnels élastiques, homogènes et isotropes — la question de sa généralisation à d'autres milieux restant largement ouverte, cf. toutefois [35] pour les milieux anisotropes. Mais là n'est pas notre propos, car force est de constater que, d'une part, la théorie de Griffith n'est pas autoconsistante car le rajout d'un critère est nécessaire si l'on ne veut pas se donner *a priori* le trajet des fissures, et que, d'autre part, quel que soit le critère de bifurcation adopté, on ne peut prévoir ainsi que des évolutions de fissure sous la forme de courbes de classe C^1 par morceaux, ce qui ne saurait couvrir tous les trajets possibles (croisements, arborescences, fragmentations, multifissurations, ...).

3. **Le problème des trajets temporels**. Considérons encore une fois un milieu bidimensionnel élastique linéaire homogène et isotrope, contenant une fissure initiale rectiligne de longueur ℓ_0. Soumettons-le à un chargement d'intensité croissante t sollicitant la fissure en mode I en envisageant

5. Le béton pourrait jouer ce rôle.

6. Compte tenu de la remarque précédente, on est de toute façon obligé de supposer l'existence de fissure(s) initiale(s) et on ne peut envisager que la propagation de celle(s)-ci.

une propagation rectiligne de celle-ci. Il s'agit, en utilisant le critère de propagation de GRIFFITH, de déterminer la fonction $\ell(t)$ donnant la longueur de la fissure en fonction de l'intensité du chargement. Compte tenu du caractère élastique linéaire du comportement, le taux de restitution d'énergie se met sous la forme $G = t^2 g(\ell)$ —ou de façon équivalente $F = t^2 f(\ell)$. Envisageons alors deux cas quant à sa dépendance vis à vis de ℓ :

1. La fonction $\ell \mapsto g(\ell)$ est continue et *décroissante* —F est donc convexe en ℓ. Alors le critère de GRIFFITH fournit l'évolution suivante :

$$\ell(t) = \begin{cases} \ell_0 & si\ 0 \leq t \leq t_0 \\ g^{-1}(\dfrac{k}{t^2}) & si\ t \geq t_0 \end{cases} \qquad avec \qquad t_0 = \sqrt{\frac{k}{g(\ell_0)}},$$

   autrement dit la fissure croît continûment à partir de l'instant t_0 ;

2. La fonction $\ell \mapsto g(\ell)$ est continue et *croissante* —F est donc concave en ℓ. Alors le critère de GRIFFITH prévoit que la fissure commencera à se propager à partir de l'instant t_0, mais comme ensuite on aura nécessairement $t^2 g(\ell(t)) > t_0^2 g(\ell_0) = k$, on ne peut plus déterminer $\ell(t)$ à partir du critère. La propagation de la fissure est décrétée *instable*, mot ne servant qu'à traduire l'impuissance de la théorie.

En fait la théorie n'a aujourd'hui apportée aucune solution quant au suivi des propagations dites instables. Il existe bien sûr des critères — liés à la dérivée seconde de l'énergie — pour savoir si la propagation, lorsqu'elle aura lieu, sera stable ou non, cf. [43] et [48], mais lorsque le critère dit qu'elle est instable, on est incapable de dire précisément — sans hypothèses supplémentaires — comment et jusqu'où elle se propagera. C'est d'autant plus regrettable que ces situations constituent plus la règle que l'exception.

On pourrait résumer cet examen en disant que l'inconvénient majeur de la théorie de GRIFFITH est de ne pas laisser assez de liberté au développement spatio-temporel de la fissuration. Le principal responsable en est le critère qui du fait même de la définition du taux de restitution d'énergie n'est pas prévu pour traiter les évolutions non régulières que sont les créations et les propagations brutales de fissures. L'idéal serait de trouver une loi de fissuration qui ne s'écarterait pas trop de la théorie de GRIFFITH tout en traitant les fissures comme des "surfaces de discontinuités libres d'apparaître et de croître où et quand bon leur semble". L'objectif de cet article est d'en proposer une et d'en analyser les potentialités.

Cette nouvelle formulation s'affranchit des hypothèses classiques relatives à l'existence d'une fissure initiale et à la propagation de la fissuration suivant des trajets prédéfinis, et est capable de rendre compte de l'apparition et de trajets spatio-temporels arbitraires de la fissuration, mais ce en renonçant (partiellement) au sacro-saint critère de GRIFFITH. Elle reprend en fait sa notion originale d'énergie de surface et consiste, à un niveau de chargement donné, à chercher parmi tous les états de fissuration possibles — *i.e.* en pratique parmi tous ceux que l'on peut imaginer — celui conduisant à un état de moindre énergie de la structure, l'énergie d'une structure dans un état de fissuration donné incluant son énergie de surface et son énergie élastique. Elle suit en cela des idées déjà mises en œuvre en endommagement, cf. [21], [23] et [20] [7]. À ce jour, cette formulation ne fonctionne que dans le cadre

7. voir aussi [18] où une idée analogue est esquissée.

restreint des milieux élastiques soumis à des chargements du type déplacements imposés, mais en contrepartie s'applique à des milieux uni-, bi- ou tri-dimensionnels, homo- ou hétéro-gènes, iso- ou aniso-tropes. Elle permet de rendre compte de l'évolution de la fissuration — depuis son apparition jusqu'à la rupture —, de traiter les problèmes de décohésion, de délaminage et de fissuration aux encastrements, de tenir compte des conditions de contact unilatéral entre les lèvres des fissures. La Section 2 est consacrée à la présentation de la nouvelle formulation. Dans la Section 3, on construit les solutions *exactes* auxquelles elle conduit pour trois problèmes basiques. La Section 4 présente les propriétés majeures — que l'on a su établir à ce jour — de la théorie revisitée en les comparant à celles de la théorie originelle. Enfin dans la Section 5 sont présentés les limites actuelles de notre formulation avec quelques développements à venir — souhaitables ou possibles.

2.2 La nouvelle formulation

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, Ω désignera un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq N \leq 3$, à frontière $\partial\Omega$ régulière et représentera la configuration de référence d'un corps élastique. Nous supposerons que Ω ne contient pas de fissure, i.e. $\Omega = int(\overline{\Omega})$, et nous la désignerons comme la configuration *saine* du milieu.

2.2.1 Définitions et Hypothèses

On commence par définir ce que l'on entend par état de fissuration. Contrairement au cadre classique de la mécanique de la rupture, on veut ici envisager des fissures en nombre et de forme arbitraires. On leur demandera seulement d'être des ensembles de (N-1)-mesure de Hausdorff finie [8] — autrement dit, d'aire finie en 3D, de longueur finie en 2D, de cardinal fini en 1D — et d'avoir une régularité suffisante pour que l'on puisse utiliser les résultats classiques d'existence et d'unicité de solutions de problèmes d'élasticité posés sur les ouverts fissurés [9]. De plus, comme on envisage également des fissures aux encastrements du corps, une partie de la fissuration pourra correspondre à une partie du bord $\partial\Omega$. Ceci nous conduit à la définition suivante :

Définition 2 (États de fissuration Γ)**.** *Tout sous-ensemble Γ de $\overline{\Omega}$ assez régulier et tel que $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma)$ soit fini est un état de fissuration a priori admissible. L'ensemble de tels états est noté $\mathcal{F}$:*

$$\mathcal{F} = \left\{\Gamma \subset \overline{\Omega} \mid \mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) < +\infty\right\} \tag{2.3}$$

En suivant l'idée originelle de Griffith, nous attribuons à tout état de fissuration une énergie de surface. Pour cela nous introduisons une fonction $k : \overline{\Omega} \times S^{N-1} \to (0, +\infty]$, $(x, n) \mapsto k(x, n)$, représentant l'énergie nécessaire pour créer un élément de fissure au point x de mesure unitaire et d'orientation n. Ceci nous conduit alors à la

Définition 3 (Énergie de surface $E_s(\Gamma)$)**.** *Soit $\Gamma \subset \mathcal{F}$. On appelle énergie de surface du corps dans son état de fissuration Γ le nombre $E_s(\Gamma)$ défini par*

$$E_s(\Gamma) = \int_\Gamma k(x, n(x)) dH^{N-1}(x) \tag{2.4}$$

8. On dit aussi de codimension 1.
9. Signalons à ce propos que la plupart des questions relatives à la régularité seront éludées dans cet article.

Ceci appelle un certain nombre de commentaires.

⋆ Remarque.

- ⋆ La densité d'énergie de surface k est strictement positive, sans quoi on pourrait fissurer le milieu sans apport d'énergie ;
- ⋆ La densité d'énergie de surface k peut être infinie. Ce sera le cas pour un matériau considéré comme "incassable", la moindre fissuration, qui exigerait un apport infini d'énergie, ne pourra avoir lieu ;
- ⋆ Si k est indépendant de x et de n — cas d'un milieu homogène et isotrope —, alors l'énergie de surface est proportionnelle à l'aire de la surface, ce qui est l'hypothèse de Griffith.
- ⋆ La densité d'énergie de surface k peut dépendre du point x de $\overline{\Omega}$. Ce sera le cas pour un milieu hétérogène. Pour un milieu diphasique par exemple, k prendra la valeur k_1 dans la phase 1, la valeur k_2 dans la phase 2, une valeur éventuellement différente k_i aux interfaces entre les deux phases et, si besoin est, encore d'autres valeurs au bord $\partial\Omega$ du corps. Cette possibilité sera exploitée pour traiter les phénomènes de décohésion, cf. Section 5 ;
- ⋆ La densité d'énergie de surface k peut dépendre de l'orientation de la fissure. Ce sera le cas pour un matériau anisotrope, l'énergie nécessaire pour créer une fissure de taille donnée pouvant dépendre de son orientation ;
- ⋆ Compte tenu du critère de fissuration que l'on adoptera par la suite, seuls les états de fissuration d'énergie de surface finie pourront arriver.
- ⋆ Nous désignerons désormais la densité d'énergie de surface $k(x, n)$ comme étant la *ténacité* du milieu au point x dans la direction n.

Définissons maintenant le chargement auquel est soumis le corps. Nous nous limitons à des chargements du type déplacements imposés, les raisons de cela seront exposées à la fin de cet article. Plus précisément, nous adoptons les hypothèses suivantes :

1. Les forces volumiques sont nulles ;
2. Envisageons le corps dans un état de fissuration Γ. La configuration "fissurée" du corps est notée Ω_Γ, la partie intérieure de la fissure Γ_i et sa partie sur la frontière Γ_b :

$$\Omega_\Gamma = int(\overline{\Omega}\backslash\Gamma), \qquad \Gamma_b = \Gamma \cap \partial\Omega, \qquad \Gamma_i = \Gamma\backslash\Gamma_b. \tag{2.5}$$

   Les fissures sont des surfaces (ensembles de codimension 1) à travers lesquelles les déplacements *peuvent* être discontinus [10]. En orientant localement ces surfaces et en désignant par n la normale unitaire orientée, un champ de déplacement admissible v prendra *a priori* deux limites différentes, notées classiquement v^- et v^+, suivant le côté par lequel on s'approche d'un point de la surface. Le saut sera noté $[\![v]\!]$, $[\![v]\!] = v^+ - v^-$. Suivant que l'on impose ou non des conditions de non interpénétration des lèvres des fissures, ce saut est soumis ou non à des restrictions. De même les conditions aux limites portant sur le vecteur contrainte diffèrent suivant le type de condition adopté. Ici, nous envisageons les deux plus classiques : les lèvres de(s) fissure(s) intérieures [11]

10. Mais qui peut le plus, peut le moins. Il peut aussi arriver que les déplacements y soient continus.
11. Il s'agit de l'intérieur du milieu sain Ω, car Γ_i fait évidemment partie du bord du milieu fissuré Ω_Γ.

seront supposées soit dans des conditions de *contact unilatéral sans frottement*, soit dans des conditions de *non contact*. Suivant le cas, les conditions aux limites sur les lèvres de Γ_i s'écrivent :

Contact unilatéral sans frottement $\sigma n = sn$, $s \leq 0$, $[\![u]\!] \cdot n \geq 0$, $s[\![u]\!] \cdot n = 0$;

Non contact $\sigma n = 0$.

3. On voudrait imposer les déplacements d'une partie $\partial_D\Omega$ du bord. Les conditions aux limites à écrire sur $\partial_D\Omega$ diffèrent suivant que ce bord est fissuré ou non. Pour les écrire, on procède en deux temps. On se donne tout d'abord un champ de déplacement U, défini sur $\partial_D\Omega$ et dépendant du temps qui correspondrait aux déplacements imposés si le corps n'était pas fissuré sur le bord. On distingue ensuite les parties du bord suivant qu'elles font partie ou non de la fissure :
   (a) Sur la partie non fissurée $\partial_D\Omega\backslash\Gamma_b$, on écrit $u = U$, les déplacements sont effectivement imposés à la valeur U ;
   (b) Sur la partie fissurée $\partial_D\Omega \cap \Gamma_b$, on écrit soit des conditions de *contact unilatéral sans frottement*, soit des conditions de *non contact*, *i.e.*, en notant n la normale unitaire sortant de Ω et u^- la trace de u sur $\partial_D\Omega \cap \Gamma_b$ lorsque l'on vient de Ω :

   Contact unilatéral sans frottement $\sigma n = sn$, $s \leq 0$, $(U - u^-) \cdot n \geq 0$, $s(U - u^-) \cdot n = 0$.

   Non contact $\sigma n = 0$;
4. Sur la partie $\partial_F\Omega$ du bord, complémentaire de $\partial_D\Omega$ les forces surfaciques exercées par l'extérieur sont nulles.

FIGURE 2.1 – *État de fissuration et de chargement du milieu.*

Il est clair que les conditions aux limites de contact unilatéral sont plus générales et plus réalistes que celles de non contact, ces dernières n'interdisant pas l'interpénétration des lèvres des fissures. Toutefois, en pratique comme dans la suite de cet article, on se contente souvent de ne traiter que les conditions de non contact du fait de leur simplicité. Les hypothèses précédentes conduisent naturellement à la

Définition 4 (Chargement U)**.** *Soient* Γ *un état de fissuration du milieu,* $\Gamma \in \mathcal{F}$*, et* $U : \partial_D\Omega \to \mathbb{R}^N$ *un champ de déplacements "régulier". Le chargement du milieu fissuré est caractérisé par la nullité du travail des efforts extérieurs donnés et l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles* $\mathcal{C}(\Gamma, U)$ *qui, suivant les hypothèses de contact adoptées, est défini par :*

– *Contact unilatéral sans frottement :*

$$\mathcal{C}(\Gamma, U) = \left\{ v : \Omega_\Gamma \to \mathbb{R}^N | [\![v]\!] \cdot n \geq 0 \text{ sur } \Gamma_i,\ v = U \text{ sur } \partial_D\Omega\backslash\Gamma_b,\ (U - v^-) \cdot n \geq 0 \text{ sur } \partial_D\Omega \cap \Gamma_b \right\} ; \tag{2.6}$$

– *Non contact :*

$$\mathcal{C}(\Gamma, U) = \left\{ v : \Omega_\Gamma \to \mathbb{R}^N |\ v = U \text{ sur } \partial_D\Omega\backslash\Gamma_b \right\} . \tag{2.7}$$

⋆ REMARQUE. Rappelons que ces champs de déplacements admissibles peuvent être discontinus sur Γ. La régularité que l'on doit leur exiger dépend de la loi de comportement envisagée. Ainsi, en élasticité linéaire, pour que v soit d'énergie finie, il faut et il suffit qu'il soit dans $H^1(\Omega_\Gamma; \mathbb{R}^N)$.

Passons maintenant aux hypothèses relatives au comportement du milieu. Nous nous restreignons délibérément aux matériaux purement élastiques subissant des déformations infinitésimales. Si l'extension aux déformations finies pourrait être effectuée sans modification majeure, par contre la prise en compte d'effets inélastiques —la plasticité par exemple— n'est pas envisagée dans ce travail. En notant $\epsilon(u)$ le champ de déformation associé au champ de déplacement u, *i.e.*, compte tenu du cadre adopté, la partie symétrique du gradient de u : $\epsilon(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$, le comportement de tout point matériel x du milieu continu est donc caractérisé par un *potentiel élastique* $W(x, \cdot)$ dont dérive la relation contrainte-déformation :

$$\sigma(x) = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}(x, \epsilon(u)(x)). \tag{2.8}$$

Nous supposons en outre que W est une fonction strictement convexe de ϵ et coercive, *i.e.* $\lim_{\epsilon\to\infty} W(x,\epsilon)/\|\epsilon\| = +\infty$. Ces conditions sont remplies si $W(x,\epsilon) = \frac{1}{2}A(x)\epsilon\cdot\epsilon$ avec

$$0 < a_m\epsilon\cdot\epsilon \leq A(x)\epsilon\cdot\epsilon \leq a_M\epsilon\cdot\epsilon < +\infty \quad \forall x \in \Omega, \forall \epsilon \neq 0,$$

ce qui correspond au cadre fréquemment adopté —dans la littérature, mais aussi dans cet article [12]— de l'élasticité *linéaire*(*hétérogène, anisotrope*). Moyennant ces hypothèses, on a le résultat classique suivant, cf. [16], [17], [42] et [28] par exemple :

Proposition 1 (Déplacement à l'équilibre)**.** *Le champ des déplacements u du milieu, à l'équilibre dans un état de fissuration Γ et sous un chargement U, est l'unique solution —à des éventuels déplacements rigides près— du problème de minimisation suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u \in \mathcal{C}(\Gamma, U) \textit{ tel que } \forall v \in \mathcal{C}(\Gamma, U), \\ \int_{\Omega_\Gamma} W(x, \epsilon(u)(x))\,dx \leq \int_{\Omega_\Gamma} W(x, \epsilon(v)(x))\,dx. \end{cases} \tag{2.9}$$

⋆ Remarque.

- ⋆ L'existence d'une solution à ce problème de minimisation exige un peu de régularité des données géométriques $\partial\Omega$, Γ et $\partial_D\Omega$, du déplacement imposé U et de la dépendance en x du potentiel élastique. C'est évidemment la régularité de la forme des fissures qui est le plus sujette à caution, puisque cette régularité, à un instant donné, est fonction de la loi d'évolution que l'on va adopter.
- ⋆ Cette propriété de minimum de l'énergie élastique du milieu à l'équilibre est évidemment une conséquence de l'hypothèse de convexité de W, qui n'est elle-même raisonnable qu'en petites déformations.
- ⋆ Le type de conditions aux limites adopté sur les surfaces fissurées ne joue qu'un rôle secondaire dans l'établissement de cette propriété — mais la solution et la valeur du minimum en dépendent évidemment fortement—, la seule différence étant qu' on minimise l'énergie élastique sur un convexe dans le cas de conditions unilatérales et sur un espace affine dans le cas de conditions de non contact.
- ⋆ En élasticité *finie*, il faudrait "relaxer" l'hypothèse de convexité, en optant par exemple pour une condition plus faible du type polyconvexité. L'unicité des positions d'équilibres ne serait plus alors garantie, mais, pour des raisons de stabilité, seules celles qui correspondraient à des minima (locaux) de l'énergie seraient à retenir, cf. [13].

12. De nombreux résultats sont présentés dans ce cadre restreint, mais la formulation que nous proposons vaut dans le cadre général.

En supposant que les conditions de régularité sont remplies de façon à ce que la Proposition 1 soit vraie, on est en mesure de définir l'énergie élastique du milieu, à l'équilibre. Ceci fait l'objet de la

Définition 5 (Énergie élastique $E_d(\Gamma, U)$ à l'équilibre)**.** *Soient Γ un état de fissuration et U un état de chargement du milieu. On définit son énergie élastique $E_d(\Gamma, U)$ associée comme étant l'énergie élastique du milieu à l'équilibre (dans cet état de fissuration et sous ce chargement) :*

$$E_d(\Gamma, U) = \min_{v \in \mathcal{C}(\Gamma, U)} \int_{\Omega_\Gamma} W(x, \epsilon(v)(x))dx. \tag{2.10}$$

Les fonctionnelles énergie élastique et énergie de surface jouissent de propriétés de monotonie, d'homogénéité ou de positivité qui nous seront utiles. Établissons-les.

Proposition 2 (Propriétés des énergies)**.** *L'énergie élastique et l'énergie de surface possèdent les propriétés suivantes :*

1. *E_s est une fonction positive, strictement croissante de Γ ;*
2. *E_d est une fonction décroissante de Γ, à U fixé ;*
3. *Pour un milieu linéairement élastique,* i.e. $W(x, \epsilon) = \frac{1}{2}A(x)\epsilon \cdot \epsilon$, *$E_d$ est une fonction positive et positivement homogène de degré 2 de U,* i.e.

$$E_d(\Gamma, tU) = t^2 E_d(\Gamma, U) \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.11}$$

Preuve. La positivité et la croissance de l'énergie de surface sont évidentes. La décroissance de l'énergie élastique en fonction de Γ tient à la propriété de minimum (2.10). En effet, si $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, alors

$$\mathcal{C}(\Gamma_2, U) \subset \mathcal{C}(\Gamma_1, U) \qquad et \qquad \min_{v \in \mathcal{C}(\Gamma_2, U)} J(v) \geq \min_{v \in \mathcal{C}(\Gamma_1, U)} J(v).$$

Dans le cas d'un milieu linéairement élastique, la positivité de E_d est évidente. De plus, il est facile de vérifier que, aussi bien avec des conditions de contact unilatérales qu'avec des conditions de non contact, on a, pour $t \geq 0$:

$$\mathcal{C}(\Gamma, tU) = t\mathcal{C}(\Gamma, U) \qquad et \qquad \int_{\Omega_\Gamma} W(x, \epsilon(tv)(x))dx = t^2 \int_{\Omega_\Gamma} W(x, \epsilon(v)(x))dx,$$

ce qui assure la propriété d'homogénéité annoncée. □

Enfin, on définit l'énergie (totale) $E_d(\Gamma, U)$ du milieu dans un état de fissuration Γ et sous un chargement U comme étant la somme de son énergie élastique et de son énergie de surface :

$$E(\Gamma, U) = E_d(\Gamma, U) + E_s(\Gamma). \tag{2.12}$$

⋆ Remarque. Ce faisant nous adoptons implicitement un cadre *quasistatique* en ne considérant que les états d'équilibre associés à chaque niveau de chargement et en négligeant l'énergie cinétique. Ceci ne nous empêchera pas pour autant d'envisager des évolutions discontinues en "temps" de la fissuration puisque dans cette approche quasistatique le temps n'est rien d'autre qu'un paramètre servant à décrire le trajet de chargement.

Nous avons maintenant tous les éléments pour formuler la loi d'évolution de la fissuration du milieu sous l'effet des variations du chargement appliqué. Ceci fait l'objet de la sous-section qui suit.

2.2.2 Loi d'évolution de la fissuration

Considérons une évolution du chargement du corps consistant en la donnée d'un chemin dans l'espace des fonctions de $\partial_D\Omega$ [13] dans $\mathbb{R}^N$. Ce chemin est paramétré par t, paramètre croissant depuis 0 que nous appelons *temps* bien qu'il puisse n'avoir aucun lien avec le Temps de la Physique. Cette dépendance en temps du chargement sera désormais explicite : $t \mapsto U(t)$. Donnons-nous l'état de fissuration *initial* du milieu, *i.e.* l'élément $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ [14] correspondant à l'état de fissuration du milieu avant le début du processus de chargement considéré. Déterminer l'évolution de la fissuration dans le corps consiste à trouver le chemin $t \mapsto \Gamma(t)$ que va décrire la fissuration dans $\mathcal{F}$. Ce chemin dépend *a priori* du chemin de chargement et de l'état de fissuration initial. Il nous reste donc à introduire cette *loi d'évolution de la fissuration*.

De façon schématique, la loi que nous allons adopter consiste à chercher, à chaque instant, l'état de fissuration tel que le corps soit dans un état de *moindre énergie*. Si l'on adoptait exactement ce principe-là, la loi d'évolution se réduirait au problème d'optimisation suivant :

$$\textit{Pour } t \geq 0, \textit{trouver} \quad \Gamma(t) \in \mathcal{F} \quad \textit{tel que} \quad E(\Gamma(t), U(t)) \leq E(\Gamma, U(t)), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{F}. \tag{2.13}$$

L'état de fissuration ne dépendrait alors que de l'*état* de chargement mais pas du *chemin* de chargement. L'irréversibilité de la fissuration ne serait donc pas prise en compte. Pour preuve, considérons le cas suivant : Supposons que le milieu soit linéairement élastique et que le chargement à un instant donné soit nul, $U = 0$. Alors, il n'est pas difficile de vérifier que c'est le milieu sain — correspondant donc à $\Gamma = \emptyset$ — qui possède l'énergie la plus faible. En effet, il vient immédiatement à partir des définitions et des propriétés évidentes de positivité des énergies que

$$E(\emptyset, 0) = 0 \leq E(\Gamma, 0) = E_s(\Gamma), \quad \forall \Gamma \in \mathcal{F}, \tag{2.14}$$

l'inégalité étant stricte dès lors que $\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma) > 0$. Le milieu reviendrait donc dans son état sain, indépendamment de tout ce qu'il aurait subi auparavant. La décharge serait le remède miracle pour cicatriser toute fissure. Il n'en est manifestement pas ainsi, il faut donc introduire l'irréversibilité de la fissuration. Exigeons désormais que $t \mapsto \Gamma(t)$ soit une fonction *croissante* au sens de l'inclusion, *i.e.* :

$$t_2 > t_1 \Longrightarrow \Gamma(t_2) \supset \Gamma(t_1). \tag{2.15}$$

La difficulté réside maintenant dans la formulation du principe de moindre énergie que nous postulons comme loi régissant l'évolution de la fissuration. En vertu de ce que nous venons de remarquer, nous ne pouvons plus écrire l'inégalité dans (2.13) pour tout $\Gamma \in \mathcal{F}$. Commençons par donner la formulation "discrétisée en temps" de la loi d'évolution.

Loi d'évolution en temps discret

Considérons une suite croissante d'instants :

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots$$

13. Nous supposons pour simplifier que la partie du bord où les déplacements sont imposés ne dépend pas du temps.
14. Γ_0 est l'ensemble vide si le milieu est sain au début du chargement considéré.

et notons U_i et Γ_i les suites de chargements et d'états de fissuration correspondants :

$$U_i = U(t_i), \qquad \Gamma_i = \Gamma(t_i).$$

Connaissant l'état de fissuration initial Γ_0, l'évolution de la fissuration se déduit par induction du principe de moindre énergie. Précisément, la loi se formule comme suit :

Loi 1 (Évolution discrète de la fissuration)**.** *Soient $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ l'état de fissuration initial et $(U_i)_{i\geq 1}$ la séquence de chargement. Les états de fissuration successifs $\Gamma_i \in \mathcal{F}$ sont régis, pour $i \geq 1$, par :*

$$\Gamma_i \supset \Gamma_{i-1} \tag{2.16}$$

$$E(\Gamma_i, U_i) \leq E(\Gamma, U_i), \qquad \forall \Gamma \in \mathcal{F}, \Gamma \supset \Gamma_{i-1} \tag{2.17}$$

L'irréversibilité est traduite par (2.16). À chaque pas de temps, (2.17) exige que l'état de fissuration effectif Γ_i soit celui qui possédera la plus petite énergie parmi ceux qui sont *plus grands que les états antérieurs*. De ce fait, l'évolution de la fissuration dépend du trajet de chargement, contrairement à ce que l'on obtenait en considérant (2.13). On l'obtient en résolvant une suite de problèmes de minimisation d'énergie.

Le seul inconvénient de la loi ainsi formulée tient à ce que la solution dépend *a priori* de la discrétisation choisie. L'évolution réelle devrait être vue comme une limite des évolutions discrètes lorsque l'on fait tendre le pas de temps vers zéro. Des difficultés mathématiques de taille ne manqueraient pas de surgir si l'on essayait d'obtenir des résultats de convergence précis. Nous ne nous risquerons pas dans cette voie dans cet article. Toutefois, nous nous proposons de déduire une loi d'évolution *en temps continu* en partant de la loi discrète précédente, en considérant un type particulier de chargement, dits *chargements linéaires croissants*, en supposant le milieu linéairement élastique et en passant formellement à la limite lorsque le pas de temps tend vers 0.

Loi d'évolution en temps continu

On a besoin au préalable d'introduire quelques définitions et notations.

Définition 6 (Chargements linéaires croissants)**.** *On dit que le milieu est soumis à un chargement linéaire croissant lorsque U(t) est de la forme*

$$U(t) = tU_0, \qquad t \geq 0. \tag{2.18}$$

⋆ Remarque. Dans cette particularisation de la dépendance en temps des déplacements imposés c'est évidemment la linéarité vis à vis de U_0 qui est importante et non celle vis à vis de t. Autrement dit, on aurait pu considérer de façon plus générale des déplacements imposés de la forme $U(t) = f(t)U_0$, avec f fonction croissante de t valant 0 en 0, tous les résultats qui suivent s'en trouveraient inchangés. En prenant $f(t) = t$, on ne fait que choisir une échelle de temps, mais toute autre, qui respecterait — pour des raisons d'irréversibilité — le sens du temps, ferait aussi bien l'affaire dans cette approche quasistatique où tout effet inertiel est négligé.

Nous devons envisager des évolutions arbitraires de la fissuration — puisque c'est un des objectifs affichés —, en particulier des évolutions non régulières en temps où, à un instant donné, la fissuration

peut brusquement s'accroître d'une surface d'aire finie. La fonction $t \mapsto \Gamma(t)$ peut donc être discontinue. Toutefois comme elle doit être croissante pour respecter la condition d'irréversibilité, on peut toujours définir une limite *avant* (à gauche) et une limite *après* (à droite), limites que l'on note respectivement $\Gamma^-(t)$ et $\Gamma^+(t)$:

$$\Gamma^-(t) = \overline{\bigcup_{s<t} \Gamma(s)}, \qquad \Gamma^+(t) = \bigcap_{s>t} \Gamma(s). \tag{2.19}$$

Définition 7 (Évolutions brutale ou continue de la fissuration)**.** *On dit que l'évolution de la fissuration est* **brutale** *à un instant t si $\Gamma^-(t) \neq \Gamma^+(t)$ et qu'elle est* **continue** *sinon,* i.e. *si $\Gamma^-(t) = \Gamma(t) = \Gamma^+(t)$.*

On est maintenant en mesure d'énoncer la loi d'évolution en temps continu se déduisant formellement de la loi discrète pour des chargements linéaires croissants.

Loi 2 (Évolution en temps continu de la fissuration)**.** *Le milieu est supposé élastique linéaire. Soient $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ l'état de fissuration initial et $U(t) = tU_0, t \geq 0$, un chargement linéaire croissant du milieu. L'évolution $t \mapsto \Gamma(t)$ de la fissuration, pour $t \geq 0$, est régie par*

- **(L0)** **La condition initiale** *:* $\Gamma^-(0) = \Gamma_0$ *;*
- **(L1)** **La condition d'irréversibilité** *:* $t \mapsto \Gamma(t)$ *croissant ;*
- **(L2)** **La première condition d'optimalité** *:* $E(\Gamma(t), tU_0) \leq E(\Gamma, tU_0), \qquad \forall \Gamma \supset \Gamma^-(t)$ *;*
- **(L3)** **La seconde condition d'optimalité** *:* $E(\Gamma(t), tU_0) \leq E(\Gamma(s), tU_0), \qquad \forall s, 0 \leq s \leq t.$

Remarquons que la condition initiale **(L0)** porte sur la limite *avant* en $t = 0$, car il se pourrait *a priori* qu'il y ait une fissuration brutale en $t = 0$. En fait, nous verrons qu'il n'en est rien et que $\Gamma^-(0) = \Gamma(0) = \Gamma_0$, cf. la remarque qui suit. On passe de (2.17) à **(L2)** en remplaçant formellement t_i par t et Γ_{i-1} par $\Gamma^-(t)$. La loi **(L2)** exige que l'énergie que possédera le milieu à un instant t soit plus petite que l'énergie qu'il aurait si son état de fissuration était plus grand, autrement dit d'écrire (2.13) pour tout Γ *contenant* $\Gamma^-(t)$. Malheureusement, cette loi seule — en plus de l'irréversibilité et de la condition initiale — se révèle insuffisante pour trouver l'évolution de la fissuration. Plus exactement, on trouvera en général trop de fonctions $t \mapsto \Gamma(t)$ croissantes, vérifiant **(L0)**–**(L2)**. Nous en donnerons des exemples par la suite. C'est **(L3)** qui constitue la condition "manquante". Elle exige que le milieu soit dans un état de fissuration effectif à l'instant t correspondant à une énergie moindre que s'il était resté dans un état de fissuration antérieur (donc plus petit). Cette condition **(L3)** n'est pas une conséquence de **(L2)**. Contrairement à **(L2)**, nous ne sommes arrivés à la déduire (formellement) de (2.17) que pour des chargements linéaires croissants et des milieux élastiques linéaires. Pour cela, on commence par établir la Proposition suivante :

Proposition 3. *Supposons que le milieu soit linéairement élastique et soumis à un chargement linéaire croissant. On a alors l'implication suivante :*

$$\Gamma' \supset \Gamma, \quad E(\Gamma', tU) \leq E(\Gamma, tU) \quad \Longrightarrow \quad E(\Gamma', sU) \leq E(\Gamma, sU), \quad \forall s \geq t. \tag{2.20}$$

Preuve. Du fait de l'homogénéité de E_d, on a

$$E(\Gamma, sU) - E(\Gamma', sU) = E(\Gamma, tU) - E(\Gamma', tU) + (s^2 - t^2)\left(E_d(\Gamma, U) - E_d(\Gamma', U)\right).$$

Le deuxième membre est positif du fait de l'hypothèse et de la propriété de décroissance de E_d avec Γ. □

Considérons maintenant une solution $(\Gamma_i)_{i\geq 0}$ du problème discret. Comme $\Gamma_i \supset \Gamma_{i-1}$ et que $E(\Gamma_i, t_iU) \leq E(\Gamma_{i-1}, t_iU)$, on a, en vertu de (2.20),

$$E(\Gamma_i, tU) \leq E(\Gamma_{i-1}, tU) \qquad \forall t \geq t_i.$$

En procédant par induction, il vient immédiatement

$$E(\Gamma_i, t_iU) \leq E(\Gamma_j, t_iU) \qquad \forall j \leq i.$$

En remplaçant formellement Γ_i par $\Gamma(t)$, t_i par t et Γ_j par $\Gamma(s), s \leq t$ on tombe exactement sur **(L3)**.

⋆ Remarque. Vérifions que l'on a toujours $\Gamma(0) = \Gamma_0$. En utilisant **(L2)** en $t = 0$ et en tenant compte de la condition initiale **(L0)** on obtient $E_s(\Gamma(0)) \leq E_s(\Gamma_0)$. Mais d'après la condition d'irréversibilité **(L1)** et la propriété de croissance de l'énergie de surface, on doit aussi avoir $\Gamma(0) \supset \Gamma_0$ et $E_s(\Gamma(0)) \geq E_s(\Gamma_0)$. On a donc $\Gamma(0) = \Gamma_0$ (à un ensemble de $\mathcal{H}^{N-1}$-mesure nulle près).

2.3 Quelques solutions exactes

Cette section a un but multiple. D'une part, elle sert à tester l'efficience de la loi d'évolution proposée dans la section précédente en la faisant fonctionner sur des exemples simples dont on peut obtenir la solution exacte, solution dont on discutera la pertinence. Mais elle met aussi en évidence l'originalité et les potentialités de la nouvelle formulation en traitant des cas que l'ancienne est inapte à prendre en compte. De plus, on verra apparaître à travers ces exemples des propriétés générales que nous établirons dans la prochaine section. Nous nous placerons dans le cadre des hypothèses nous ayant permis de formuler la loi d'évolution en temps continu, à savoir : *milieu élastique linéaire et chargement linéaire croissant.*

2.3.1 Milieu unidimensionnel

Nous considérons tout d'abord un milieu unidimensionnel ($N = 1$) dont la configuration de référence est $\Omega = (0, L)$. Le milieu est (éventuellement) hétérogène de coefficient d'élasticité $A(x) = E(x)S$, $E(x)$ étant le module d'Young du matériau constitutif au point x et S ayant la dimension d'une surface, et de densité d'énergie de surface $k(x, n) = \kappa(x)S$, κ ayant la dimension d'une énergie par unité de surface — alors que k a la dimension d'une énergie [15]. Les états de fissuration possibles de ce milieu 1D sont les sous-ensembles de $[0, L]$ constitués d'un ensemble *fini* de points :

$$\mathcal{F} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{F}_0, \qquad \mathcal{F}_0 = \{\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\} \quad | \quad n \in \mathbb{N}_*,\ x_i \in [0, L], 1 \leq i \leq n\}. \tag{2.21}$$

Partant du milieu dans son état sain, $\Gamma^-(0) = \emptyset$, les deux extrémités $x = 0$ et $x = L$ ont leur déplacement imposé respectivement à 0 et εt, t croissant depuis 0, $\varepsilon = \pm 1$ — $\varepsilon = +1$ correspondant à une traction et $\varepsilon = -1$ à une compression —, *i.e.*

$$\partial_D\Omega = \{0, L\}, \qquad u^+(0) = 0, u^+(L) = \varepsilon t.$$

15. Ces notations sont introduites de façon à pouvoir comparer les résultats de cet exemple 1D avec ceux d'un milieu 3D.

Nous allons tour à tour traiter déterminer le problème d'évolution de la fissuration en envisageant soit des conditions unilatérales de contact soit des conditions de non contact. Commençons par ces dernières.

Conditions de non contact

Calculons les énergies du milieu à un instant t, suivant qu'il est ou non fissuré.

– **Milieu sain.** L'énergie de surface est nulle et l'énergie élastique s'obtient sans difficulté :

$$E(\emptyset, \varepsilon t) = \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t^2}{L}, \qquad avec \qquad \frac{1}{\overline{E}} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{E(x)}dx. \tag{2.22}$$

– **Milieu fissuré.** Considérons un état de fissuration $\Gamma \in \mathcal{F}_0$, $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Il est facile de vérifier que l'énergie élastique est nulle, chaque "morceau" subissant une translation pure. L'énergie se réduit donc à l'énergie de surface :

$$E(\Gamma, \varepsilon t) = \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i)S. \tag{2.23}$$

Munis de ces expressions des énergies, nous nous proposons de montrer successivement que le milieu ne se fissure pas tant que le chargement n'a pas atteint une valeur critique t_r , mais qu'il se rompt dès que le chargement dépasse cette valeur critique. Précisément, nous allons établir :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \leq t < t_r \\ \{x_1\} & si \quad t > t_r \end{cases}, \tag{2.24}$$

où

$$t_r = \sqrt{\frac{2\kappa_m L}{\overline{E}}}, \qquad \kappa_m = \inf_{x\in[0,L]} \kappa(x), \qquad x_1 \in \{x \in [0, L] |\ \kappa(x) = \kappa_m\}. \tag{2.25}$$

Preuve. Montrons tout d'abord que le milieu reste sain tant que $t < t_r$. Tout d'abord en utilisant la loi **(L2)** en $t = 0$, on a $E(\Gamma(0), 0) \leq E(\emptyset, 0) = 0$ et donc $\Gamma(0) = \emptyset$. Ensuite, on ne peut trouver un $t < t_r$ tel que $\Gamma(t) \neq \emptyset$, car sinon on aurait $\Gamma(t) = \Gamma_r \in \mathcal{F}_0$, et, en utilisant la loi **(L3)** avec $s = 0$, $E_s(\Gamma_r) \leq E(\emptyset, \varepsilon t)$, ce qui conduirait à

$$\kappa_m S \leq \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i)S \leq \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t^2}{L} < \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t_r^2}{L} = \kappa_m S,$$

i.e. une contradiction.

Montrons ensuite que le milieu se fissure, *i.e.* $\Gamma(t) \in \mathcal{F}_0$, dès que $t > t_r$. Sinon on aurait $\Gamma(t) = \emptyset$ pour un $t > t_r$. Mais alors, d'après la loi **(L2)**, on devrait avoir, en prenant $\Gamma = \{x_1\}$, $E(\Gamma, \varepsilon t) \geq E(\emptyset, \varepsilon t)$, ce qui conduirait à

$$\kappa(x_1)S \geq \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t^2}{L}, \qquad \forall x_1 \in [0, L].$$

En prenant l'infimum en x_1, il viendrait

$$\kappa_m S \geq \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t^2}{L} > \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t_r^2}{L} = \kappa_m S,$$

d'où une contradiction.

Montrons que $E(\Gamma(t_r), \varepsilon t_r) = \kappa_m S$. Comme $\Gamma^-(t_r) = \emptyset$, la loi **(L2)** donne $E(\Gamma(t_r), \varepsilon t_r) \leq \kappa_m S$. Mais comme $E(\emptyset, \varepsilon t_r) = \kappa_m S$ et que $E(\Gamma, \varepsilon t_r) \geq \kappa_m S$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{F}_0$, on a en fait l'égalité. De plus on a nécessairement $\Gamma^+(t_r) \in \mathcal{F}_0$ puisque $\Gamma(t) \in \mathcal{F}_0, \forall t > t_r$. En utilisant la loi **(L3)** avec $t > s > t_r$, , il vient

$$\kappa_m S \leq E_s(\Gamma(t)) = E(\Gamma(t), \varepsilon t) \leq E(\Gamma(s), \varepsilon t) = E_s(\Gamma(s)) = E(\Gamma(s), \varepsilon s) \leq E(\Gamma(t_r), \varepsilon s). \tag{2.26}$$

Comme $\Gamma(t) \supset \Gamma(s)$, on a aussi $E_s(\Gamma(t)) \geq E_s(\Gamma(s))$ et donc en fait $\Gamma(t) = \Gamma(s)$. Par conséquent $\Gamma(t) = \Gamma^+(t_r)$, $\forall t > t_r$. En reportant et en passant à la limite dans (2.26) quand $s \to t_r$, on obtient $E_s(\Gamma^+(t_r)) = \kappa_m S$ et donc $\Gamma^+(t_r) = \{x_1\}$, x_1 étant un point de moindre ténacité. En résumé, à partir du chargement t_r le milieu n'est fissuré qu'en *un et un seul* point, du fait de l'irréversibilité ce point ne dépend pas de t et que c'est un des points de ténacité minimale [16]. □

Conditions unilatérales de contact

L'énergie du milieu sain est inchangée. Par contre le calcul des énergies d'un milieu fissuré est à reconsidérer en distinguant le chargement de traction de celui de compression. Soit $\Gamma \in \mathcal{F}_0$, $\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\}$:

- **Traction :** $\varepsilon = +1$**.** L'énergie de surface est donnée par (2.23) et l'énergie élastique est nulle. En effet, le champ de déplacement consistant en un déplacement nul des n premiers morceaux et une translation t du dernier est cinématiquement admissible car il vérifie les conditions de non-interpénétration ($[\![u]\!](x_i) \geq 0$) et son énergie élastique correspondante est nulle [17]. On a donc les mêmes expressions que dans le cas des conditions de non contact.
- **Compression :** $\varepsilon = -1$**.** L'énergie de surface est toujours donnée par (2.23), mais par contre nous ne pouvons plus faire le raisonnement précédent sur l'énergie élastique, le champ de déplacement envisagé précédemment n'étant plus cinématiquement admissible car violant la condition de non-interpénétration. Il est facile de voir que le champ solution est nécessairement continu et qu'il coïncide donc avec celui du milieu sain. D'où finalement :

$$E(\Gamma, -t) = \frac{1}{2}\overline{E}S\frac{t^2}{L} + \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i)S. \tag{2.27}$$

Il est facile de conclure que l'évolution de la fissuration lors d'un chargement croissant de traction est la même que celle obtenue avec des conditions de non contact, puisque les expressions des énergies sont identiques. Pour un chargement de compression, comme l'énergie du milieu fissuré est toujours supérieure à celle du milieu sain, on peut conclure que le milieu ne se fissurera jamais : $\Gamma(t) = \emptyset, \forall t \geq 0$ [18]. On peut donc résumer les résultats obtenus par la

16. Voir la remarque ci-après si un tel point n'existe pas.
17. Ce déplacement est évidemment solution du problème d'équilibre.
18. Le lecteur scrupuleux le déduira rigoureusement des lois **(L0)**–**(L3)**.

Proposition 4. *Un milieu élastique unidimensionnel de longueur L, fixé à une extrémité et soumis à un déplacement d'intensité croissante à l'autre extrémité ne se rompra jamais si ce déplacement correspond à une compression, mais se rompra en un de ses points de moindre ténacité à partir d'une valeur critique t_r de ce déplacement donnée par*

$$t_r = \sqrt{2\frac{\kappa_m L}{\overline{E}}}.$$

FIGURE 2.2 – *État de la barre : (i) en $t = 0$, (ii) en $t < t_r$, (iii) en $t > t_r$.*

Remarques

Le traitement exhaustif d'un milieu unidimensionnel est riche d'enseignement sur les potentialités de la loi de fissuration adoptée. Analysons les résultats obtenus. Tout d'abord les questions d'existence et d'unicité de solutions :

- ⋆ L'existence d'une solution au problème d'évolution n'est assurée que dans la mesure où il existe (au moins) un point de moindre ténacité, *i.e.* l'infimum κ_m est atteint. S'il y en a, c'est en un de ces points qu'il y aura rupture. Par contre, si l'infimum n'est pas atteint, alors *stricto sensu* le problème n'a pas de solution. Considérons par exemple le cas où le milieu est hétérogène avec la répartition de ténacité suivante :

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_0 & si \quad 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{x}{L}\kappa_0 & si \quad L/2 < x \leq L. \end{cases}$$

  L'infimum $\kappa_0/2$ n'est pas atteint, le milieu aurait envie de se rompre en $x = L/2$ mais la valeur de la ténacité en ce point le lui interdit. Ce "canular" mathématique peut être levé en modifiant $\kappa(L/2)$ et en lui donnant la valeur κ_0. La fonction $x \mapsto \kappa(x)$ est alors semi-continue inférieurement et le problème (dit "relaxé") possède une solution.
- ⋆ L'unicité quant à elle n'est garantie que s'il n'existe qu'un point de moindre ténacité. Sinon, tout point de moindre ténacité — s'il en existe — est un lieu potentiel de rupture. Par conséquent si le milieu est homogène, $\kappa(x) = \kappa_0$, la rupture peut survenir n'importe où. [19]
- ⋆ La condition d'optimalité **(L3)** joue un rôle essentiel pour limiter le nombre de solutions. Pour preuve, il suffit de remarquer que l'évolution $t \mapsto \Gamma(t)$ suivante

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \emptyset & si\ 0 \leq t \leq t_0 \\ \{x_1\} & si\ t_0 < t \leq t_1 \\ \cdots & \cdots \\ \{x_1, \ldots, x_n\} & si\ t_{n-1} < t \leq t_n \\ \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} & si\ t_n < t \end{cases},$$

19. Mais pas n'importe quand, puisque la valeur du déplacement à rupture t_r est indépendante du point de rupture.

où $n \geq 1$, les x_i sont des points arbitraires de [0,L] et $t_0 \leq t_r$, vérifie **(L0)**–**(L2)**, mais pas **(L3)**. On voit donc qu'en particulier **(L3)** interdit une fracturation multiple du milieu.

Regardons maintenant avec un œil de physicien ce que prédit notre formulation.

- ⋆ Tout d'abord, elle est capable de prédire (de façon précise) la rupture bien que l'on parte d'un milieu sain. La théorie de Griffith ne le peut pas.
- ⋆ Elle prévoit que le milieu rompra en un point de moindre ténacité une fois que la traction exercée sera suffisamment forte, puis qu'il ne se passera plus rien. Le milieu ne peut plus casser en d'autres endroits — dans la mesure où l'on continue à n'imposer que le déplacement des extrémités.
- ⋆ Elle met en évidence, par l'intermédiaire des conditions unilatérales de contact, une asymétrie de comportement à rupture en traction-compression.

Tous ces résultats sont évidemment tout à fait satisfaisants. Notons que la réponse prédite du milieu peut se résumer dans le diagramme force-déplacement représenté dans la figure suivante, la force à rupture F_r se déduisant du déplacement à rupture par la relation :

$$F_r = \overline{E} S \frac{t_r}{L} = S\sqrt{2\frac{\kappa_m \overline{E}}{L}}.$$

FIGURE 2.3 – *Diagramme Force vs Déplacement de la réponse de la barre.*

Finissons ce paragraphe relatif à l'analyse des résultats pour un milieu 1D par une dernière remarque sur les prédictions de la formulation.

- ⋆ Elle prévoit un effet d'échelle puisque le déplacement à rupture croît comme la racine carrée de la longueur du milieu, ou, de façon équivalente, que la force à rupture décroît comme la racine carrée de la longueur. Cet effet, qui se révèle être général, est dû en partie à la présence d'une longueur caractéristique dans le modèle provenant du rapport entre l'énergie de surface (qui est surfacique) et l'énergie élastique (qui est volumique). On laissera le lecteur juge de la pertinence de cet effet tout en signalant qu'il est déjà présent dans la théorie de Griffith.

2.3.2 Traction simple sur un cylindre tridimensionnel

Position du problème

Nous considérons maintenant un milieu tridimensionnel ($N = 3$) dont la configuration de référence est l'ouvert cylindrique $\Omega = S \times (0, L)$ dont la section S est un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière ∂S régulière. Le milieu est homogène et isotrope, de module d'Young E, de coefficient de Poisson ν et de densité d'énergie de surface κ_0, *i.e.* $k(x, n) = \kappa_0$, κ_0 ayant comme dans l'exemple précédent la dimension d'une énergie par unité de surface. Partant du milieu dans son état sain, $\Gamma^-(0) = \emptyset$, le cylindre est soumis au chargement linéaire croissant suivant : les forces volumiques ainsi que les forces surfaciques sur la surface latérale $\partial S \times (0, L)$ sont nulles ; sur la base $S_0 \overset{déf}{=} S \times \{0\}$, le déplacement

normal et les cisaillements sont nuls, alors qu'à l'extrémité $S_L \overset{déf}{=} S \times \{L\}$, les cisaillements sont nuls et le déplacement normal est croissant depuis 0. Autrement dit les conditions aux limites — en l'absence de fissuration au bord — s'écrivent :

$$u_3 = 0 \ et \ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \ sur \ S_0, \qquad u_3 = t \ et \ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \ sur \ S_L, \qquad \sigma n = 0 \ sur \ \partial S \times (0, L).$$

Les états de fissuration possibles de ce milieu 3D sont tous les sous-ensembles de $\overline{\Omega}$ d'aire finie,

$$\mathcal{F} = \left\{ \Gamma \mid \Gamma \subset \overline{\Omega}, \mathcal{H}^2(\Gamma) < \infty \right\}. \tag{2.28}$$

Comme nous sommes amenés à les envisager tous, ce problème d'évolution de la fissuration est sensiblement plus difficile à traiter que son homologue unidimensionnel. Pour simplifier nous n'envisagerons que des conditions de non contact sur les lèvres des fissures, ce qui nous conduit à la définition suivante des champs de déplacements cinématiquement admissibles pour le milieu en l'état de fissuration Γ :

$$\mathcal{C}(\Gamma, t) = \left\{ v \in H^1(\Omega_\Gamma, \mathbb{R}^3) \mid v_3 = 0 \ sur \ S_0 \backslash \Gamma, \ v_3 = t \ sur \ S_L \backslash \Gamma \right\}, \tag{2.29}$$

les conditions aux limites de déplacement normal imposé n'étant à vérifier que sur les parties des extrémités non fissurées.

Estimation des énergies

Considérons le milieu dans sa configuration saine et notons $u(\emptyset, t)$ et $\sigma(\emptyset, t)$ les champs des déplacements et des contraintes à l'équilibre du milieu sous le chargement t. Compte tenu des conditions aux limites adoptées, ils s'obtiennent sans difficulté :

$$u(\emptyset, t)(x) = -\left(\nu t \frac{x_1}{L} + a_1\right) e_1 - \left(\nu t \frac{x_2}{L} + a_2\right) e_2 + t \frac{x_3}{L} e_3, \qquad \sigma(\emptyset, t)(x) = E \frac{t}{L} e_3 \otimes e_3, \tag{2.30}$$

a_1 et a_2 étant deux constantes arbitraires correspondant à une translation d'ensemble transversale du cylindre. Les énergies correspondantes valent respectivement

$$E_s(\emptyset) = 0, \qquad E(\emptyset, t) = E_d(\emptyset, t) = \tfrac{1}{2} E \frac{t^2}{L} \mathcal{H}^2(S). \tag{2.31}$$

Envisageons maintenant un état de fissuration Γ arbitraire du milieu. Notons $S(\Gamma)$ la projection de Γ sur S, *i.e.*

$$S(\Gamma) = \left\{ (x_1, x_2) \in \overline{S} \mid il \ existe \ x_3 \ tel \ que \ (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma \right\},$$

et $\theta(\Gamma)$ la fraction d'aire de $S(\Gamma)$ par rapport à S :

$$\theta(\Gamma) = \frac{\mathcal{H}^2(S(\Gamma))}{\mathcal{H}^2(S)}.$$

Il est évidemment impossible d'obtenir la valeur exacte de l'énergie du corps dans un état de fissuration arbitraire. Mais nous allons en établir une minoration qui s'avérera suffisante pour résoudre exactement le problème d'évolution de la fissuration. Ceci fait l'objet de la

Proposition 5. *Quels que soient $\Gamma \in \mathcal{F}$ et $t \geq 0$, l'énergie $E(\Gamma, t)$ du cylindre dans un état de fissuration Γ et soumis à une traction t vérifie l'inégalité*

$$E(\Gamma, t) \geq (1 - \theta(\Gamma))\, E(\emptyset, t) + \theta(\Gamma)\kappa_0 \mathcal{H}^2(S). \tag{2.32}$$

De plus, quand $t \neq 0$, l'égalité a lieu si et seulement si $\Gamma = \emptyset$ ou $\Gamma \in \mathcal{F}_r$, avec $\mathcal{F}_r = \left\{\overline{S} \times \{z\} \ |z \in [0, L]\right\}$, autrement dit si et seulement si le corps est sain ou bien est rompu par une fracture transversale.

Preuve. L'inégalité se déduit des deux inégalités suivantes :

$$E_s(\Gamma, t) \geq \theta(\Gamma)\kappa_0 \mathcal{H}^2(S), \tag{2.33}$$

$$E_d(\Gamma, t) \geq (1 - \theta(\Gamma))\, E_d(\emptyset, t). \tag{2.34}$$

La première inégalité est une conséquence directe de la définition de $S(\Gamma)$, projection de Γ sur S. Remarquons que l'égalité est satisfaite si et seulement si Γ est une fissure transverse, autrement dit de la forme :

$$\Gamma = \Sigma \times \{z\} \quad avec \quad \Sigma \subset \overline{S} \ et \ z \in [0, L].$$

Pour établir la deuxième on utilise les — très classiques, en élasticité linéaire — théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire, cf. [16] ou [28], *i.e.* des propriétés de dualité d'Analyse Convexe, cf. [19]. Il vient

$$\begin{aligned}
E_d(\Gamma, t) &= \min_{v \in \mathcal{C}(\Gamma,t)} \tfrac{1}{2} \int_{\Omega_\Gamma} A\epsilon(v) \cdot \epsilon(v)\, dx \\
&= \min_{v \in \mathcal{C}(\Gamma,t)} \max_{\tau \in L^2(\Omega, M_s^3)} \int_{\Omega_\Gamma} \left(\tau \cdot \epsilon(v) - \tfrac{1}{2} A^{-1}\tau \cdot \tau\right)\, dx \\
&= \max_{\tau \in L^2(\Omega, M_s^3)} \inf_{v \in \mathcal{C}(\Gamma,t)} \int_{\Omega_\Gamma} \left(\tau \cdot \epsilon(v) - \tfrac{1}{2} A^{-1}\tau \cdot \tau\right)\, dx \\
&= \max_{\tau \in \mathcal{S}(\Gamma,t)} \int_{\Omega_\Gamma} \left(\tau \cdot \epsilon(u(\emptyset, t)) - \tfrac{1}{2} A^{-1}\tau \cdot \tau\right)\, dx,
\end{aligned}$$

$\mathcal{S}(\Gamma, t)$ étant l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles, *i.e.*

$$\mathcal{S}(\Gamma, t) = \left\{\tau \in L^2(\Omega, M_s^3) \ \middle| \int_{\Omega_\Gamma} \tau \cdot \epsilon(v)\, dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\Gamma, t)\right\}$$

et $\mathcal{C}^0(\Gamma, t)$ l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{C}(\Gamma, t)$. La dernière égalité dans l'expression de l'énergie provient du fait que $u(\emptyset, t) \in \mathcal{C}(\Gamma, t)$. Considérons le champ τ suivant :

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & si \ x \in S(\Gamma) \times (0, L), \\ \sigma(\emptyset, t) & sinon. \end{cases} \tag{2.35}$$

On vérifie immédiatement qu'il est admissible, ce qui fournit l'inégalité

$$\begin{aligned}
E_d(\Gamma, t) &\geq \int_{\Omega_\Gamma} \left(\tau \cdot \epsilon(u(\emptyset, t)) - \tfrac{1}{2} A^{-1}\tau \cdot \tau\right)\, dx \\
&= \int_{S \setminus S(\Gamma) \times (0,L)} \left(\sigma(\emptyset, t) \cdot \epsilon(u(\emptyset, t)) - \tfrac{1}{2} A^{-1}\sigma(\emptyset, t) \cdot \sigma(\emptyset, t)\right)\, dx
\end{aligned}$$

dont on déduit l'inégalité cherchée.

Cherchons à quelle condition les deux inégalités sont-elles simultanément des égalités. C'est évidemment le cas *si* $\Gamma = \emptyset$. C'est aussi le cas *si* $\Gamma \in \mathcal{F}_r$ puisqu'alors $E_d(\Gamma, t) = 0$ et que $E_s(\Gamma) = \kappa_0 \mathcal{H}^2(S)$. Réciproquement, la première égalité n'ayant lieu que si $\Gamma = \Sigma \times \{L\}$, envisageons la deuxième égalité pour une telle fissure. Il faut pour cela que le champ test τ soit celui qui réalise le max, autrement dit qu'il soit le champ des contraintes à l'équilibre. Le champ des déformations serait alors :

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in \Sigma \times (0, L), \\ -\nu \dfrac{t}{L}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) + \dfrac{t}{L} e_3 \otimes e_3 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

En dehors du cas trivial $t = 0$, pour des raisons de compatibilité, ceci n'est possible que si $\Sigma = \emptyset$ *ou bien* $\overline{S}$ — à des ensembles négligeables près. □

Évolution de la fissuration

Munis de ces estimations, nous sommes en mesure de démontrer la

Proposition 6. *Le problème de minimisation de l'énergie suivant :*

$$\textit{Trouver, pour } t \geq 0, \Gamma(t) \in \mathcal{F} \textit{ tel que} \quad E(\Gamma(t), t) \leq E(\Gamma, t), \forall \Gamma \in \mathcal{F}$$

admet comme uniques solutions des états de fissuration de la forme :

$$\Gamma(t) \begin{cases} = \emptyset & \textit{si} \quad 0 \leq t < t_r, \\ = \emptyset \textit{ ou } \in \mathcal{F}_r & \textit{si} \quad t = t_r, \\ \in \mathcal{F}_r & \textit{si} \quad t > t_r, \end{cases} \qquad \textit{où} \quad t_r = \sqrt{2 \frac{\kappa_0 L}{E}}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que de tels $\Gamma(t)$ minimisent $(1 - \theta(\Gamma))\, E(\emptyset, t) + \theta(\Gamma) \kappa_0 \mathcal{H}^2(S)$ sur $\mathcal{F}$ et d'utiliser la Proposition précédente. □

Il devient alors facile de déterminer l'évolution de la fissuration dans le cylindre. En raisonnant sur la loi d'évolution en temps discret, on en déduit que le cylindre reste sain tant que t_i est plus petit que t_r et qu'il se fracture transversalement, *i.e.* $\Gamma(t_i) = \overline{S} \times \{z\}$ dès que $t_i > t_r$. Après cette fracturation, il ne se passe évidemment plus rien, car — pour des raisons d'irréversibilité —, on aura nécessairement $\Gamma(t_j) = \overline{S} \times \{z\}$ avec z indépendant de j pour tout $t_j > t_r$. Comme ce résultat est indépendant de la discrétisation en temps choisie, on peut donc conclure par la

Proposition 7. *Le cylindre reste sain tant que le déplacement normal de l'extrémité reste inférieur à la valeur critique t_r et qu'il y aura une rupture brutale du cylindre suivant une section transversale arbitraire du cylindre dès que cette valeur critique sera dépassée, cf. la figure 2.4.*

⋆ Remarque.

FIGURE 2.4 – *État du cylindre sous traction simple : (i) en $t = 0$, (ii) en $t < t_r$, (iii) en $t > t_r$.*

- ⋆ Son obtention est évidemment plus délicate que celle du problème unidimensionnel. L'estimation de l'énergie joue un rôle essentiel. Nous avons raisonné sur la formulation en temps discret. L'obtention du résultat à partir de la formulation continue nécessite des estimations plus fines. On laisse le soin au lecteur de s'y essayer.
- ⋆ La solution du problème 3D est tout à fait conforme à celle du problème unidimensionnel dans le cas homogène. C'est ce à quoi l'on s'attendait. On pourrait d'ailleurs reprendre l'étude en envisageant des conditions unilatérales de contact et on devrait retrouver la solution 1D. Ici encore on laisse le soin au lecteur de le vérifier.

2.3.3 Arrachement d'une armature

Nous présentons dans cette sous-section un autre exemple tridimensionnel dont on sait calculer la solution exacte.

Position du problème

Nous considérons un milieu tridimensionnel ($N = 3$) dont la configuration de référence est l'ouvert cylindrique $\Omega = S \times (0, L)$ dont la section S est la couronne circulaire de centre $(0, 0)$ et de rayons intérieur R_a et extérieur R_m. Le milieu est homogène et isotrope, de coefficients de Lamé λ et μ, de densité d'énergie de surface κ_0. Une armature cylindrique, *rigide et incassable*, à section circulaire de rayon R_m est enchâssée dans le cylindre et lui est collée. Partant du cylindre élastique dans son état sain, $\Gamma^-(0) = \emptyset$, l'ensemble est soumis au chargement linéaire croissant suivant : les forces volumiques sont nulles ; sur la base S_0 et sur l'extrémité S_L, les déplacements tangentiels et les contraintes normales sont nulles ; la paroi latérale extérieure ($r = R_m$) est maintenue fixe alors qu'on impose une translation longitudinale croissante depuis 0 à l'armature rigide. Autrement dit, en notant Σ_a et Σ_m les parois latérales intérieure ($r = R_a$) et extérieure ($r = R_m$) du cylindre élastique, les conditions aux limites — en l'absence de fissuration au bord — s'écrivent :

$$u_1 = u_2 = 0 \ et \ \sigma_{33} = 0 \ sur \ S_0 \cup S_L, \qquad u = 0 \ sur \ \Sigma_m, \qquad u = t\, e_3 \ sur \ \Sigma_a.$$

Évolution de la fissuration

Énonçons tout de suite le résultat.

Proposition 8. *Le cylindre reste sain tant que le déplacement de l'armature reste inférieur à une valeur critique t_r, et il y a un arrachement brutal de l'armature (avec décohésion totale de l'interface) dès que cette valeur critique est dépassée, cf. la figure 2.5,* i.e.

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \le t < t_r, \\ \emptyset \ ou \ \overline{\Sigma_a} & si \quad t = t_r, \\ \overline{\Sigma_a} & si \quad t > t_r, \end{cases} \qquad avec \qquad t_r = \sqrt{\frac{2kR_a}{\mu} \log \frac{R_m}{R_a}}.$$

Preuve. On suit une démarche analogue à celle du problème de traction. Quand on utilise le système de coordonnées cylindriques, les coordonnées cylindriques d'un point sont notées entre crochet, i.e. $x = (x_1, x_2, x_3) = [r, \theta, z]$.

1. On détermine les champs des déplacements et des contraintes à l'équilibre du milieu sain sous le chargement t. Compte tenu des conditions aux limites adoptées, ils s'obtiennent sans difficulté :

$$u(\emptyset, t)(x) = \frac{\log r/R_m}{\log R_a/R_m}\, t\, e_z, \qquad \sigma(\emptyset, t)(x) = \frac{t}{r \log R_m/R_a}\, \mu\, e_r \otimes_s e_z. \tag{2.36}$$

Les énergies correspondantes valent respectivement

$$E_s(\emptyset) = 0, \qquad E(\emptyset, t) = E_d(\emptyset, t) = \frac{\pi \mu t^2 L}{\log R_a/R_m}. \tag{2.37}$$

2. On établit une minoration des énergies. Soit un état de fissuration Γ arbitraire du milieu. Notons $\Sigma(\Gamma)$ la projection radiale de Γ sur Σ_a, *i.e.*

$$\Sigma(\Gamma) = \{[R_a, \theta, z] \mid \textit{il existe } r \textit{ tel que } [r, \theta, z] \in \Gamma\} \subset \overline{\Sigma_a},$$

$\omega(\Gamma)$ la fraction d'aire de $\Sigma(\Gamma)$ par rapport à Σ_a :

$$\omega(\Gamma) = \frac{\mathcal{H}^2(\Sigma(\Gamma))}{\mathcal{H}^2(\Sigma_a)}$$

et $V(\Gamma)$ le secteur angulaire du cylindre contenant la fissure :

$$V(\Gamma) = \left\{[r, \theta, z] \in \overline{\Omega} \mid [R_a, \theta, z] \in \Sigma(\Gamma)\right\}.$$

On établit les deux inégalités suivantes :

$$E_s(\Gamma, t) \geq \omega(\Gamma)\kappa_0 \mathcal{H}^2(\Sigma_a), \tag{2.38}$$
$$E_d(\Gamma, t) \geq (1 - \omega(\Gamma))\, E_d(\emptyset, t). \tag{2.39}$$

La première inégalité est une conséquence directe de la définition de $\Sigma(\Gamma)$, projection de Γ sur Σ_a. On remarque que l'égalité est satisfaite si et seulement si $\Gamma = \Sigma(\Gamma) \subset \Sigma_a$. Pour établir la deuxième, on utilise les propriétés de dualité en choisissant ici comme champ de contraintes statiquement admissible le champ τ suivant :

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in V(\Gamma), \\ \sigma(\emptyset, t) & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{2.40}$$

Un simple calcul fournit l'inégalité désirée. En résumé l'énergie $E(\Gamma, t)$ du cylindre dans un état de fissuration Γ et soumis au chargement t vérifie l'inégalité

$$E(\Gamma, t) \geq (1 - \omega(\Gamma))\, E(\emptyset, t) + \omega(\Gamma)\kappa_0 \mathcal{H}^2(\Sigma_a). \tag{2.41}$$

3. Quand $t \neq 0$, on établit — en utilisant ici aussi des arguments de compatibilité des déformations — que l'égalité a lieu si et seulement si $\Gamma = \emptyset$ *ou* $\Gamma = \Sigma_a$, autrement dit si et seulement si le corps est sain et l'armature parfaitement collée ou bien est complètement décollée.
4. Muni de ces estimations, on est alors en mesure de démontrer que l'état de fissuration $\Gamma(t)$ proposée dans l'énoncé est l'unique [20] solution du problème de minimisation de l'énergie suivant :

$$\text{Trouver, pour } t \geq 0, \Gamma(t) \in \mathcal{F} \text{ tel que} \quad E(\Gamma(t), t) \leq E(\Gamma, t), \forall \Gamma \in \mathcal{F}$$

   Il suffit pour cela de remarquer que $\Gamma(t)$ est un — mais pas forcément l'unique — minimiseur sur $\mathcal{F}$ de $(1 - \omega(\Gamma))\, E(\emptyset, t) + \omega(\Gamma)\kappa_0 \mathcal{H}^2(\Sigma_a)$ et d'utiliser les estimations précédentes.
5. On conclut alors facilement que $t \mapsto \Gamma(t)$, qui est bien croissante est l'unique solution du problème d'évolution.

□

FIGURE 2.5 – *État du cylindre armé : (i) en $t = 0$, (ii) en $t < t_r$, (iii) en $t > t_r$.*

⋆ REMARQUE. Cet exemple diffère des deux précédents d'une part parce qu'il y a ici unicité de la réponse — sauf à l'instant critique t_r où l'armature peut-être tout aussi bien collée qu'arrachée — et d'autre part parce que la fissuration n'a lieu qu'au bord, le cylindre élastique restant parfaitement sain. Il est par contre similaire aux précédents en ce sens que la fissuration apparaît brutalement.

2.4 Quelques propriétés

Cette section est consacrée à l'établissement de propriétés générales des évolutions de la fissuration que prédit notre formulation et de leur comparaison avec celles prévues par la théorie de Griffith. On se place toujours dans le cas d'un corps linéairement élastique ($\sigma = A\epsilon$), fragile ($0 < k(x, n) < +\infty$) et soumis à un chargement à déplacements imposés linéaire croissant ($U(t) = tU_0$).

2.4.1 Initiation de la fissuration et rupture

Avant d'établir ces propriétés on s'intéresse aux états de fissuration dans lequel le corps est sans énergie élastique, notion qui joue un rôle important par la suite.

Définition 8 (États de fissuration sans énergie élastique)**.** *On dit que le corps, soumis au chargement normalisé U_0, est dans un état de fissuration Γ sans énergie élastique si $E_d(\Gamma, U_0) = 0$. L'ensemble de tels états est noté $\mathcal{F}_0$:*

$$\mathcal{F}_0 = \{\Gamma \mid E_d(\Gamma, U_0) = 0\}.$$

20. Sauf en $t = t_r$ où $\emptyset$ et Σ_a sont les deux (seuls) minimiseurs.

Commençons par remarquer que si Γ est un état de fissuration sans énergie élastique, alors tout état de fissuration le contenant en est un lui-même :

$$\Gamma_1 \in \mathcal{F}_0 \quad et \quad \Gamma_2 \supset \Gamma_1 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_2 \in \mathcal{F}_0. \tag{2.42}$$

En effet, comme l'énergie élastique est une fonction positive décroissante, on a $0 \leq E_d(\Gamma_2, U_0) \leq E_d(\Gamma_1, U_0) = 0$.

Notons aussi qu'il existe de tels états de fissuration si l'on adopte des conditions aux limites de *non contact*.

Exemple.

- Le bord où les déplacements sont imposés en est un : $\partial_D\Omega \in \mathcal{F}_0$. En effet, dans ce cas, tout déplacement rigide u, *i.e.* tel que $\epsilon(u) = 0$, est solution du problème d'équilibre puisqu'aucune condition à la limite cinématique n'est à vérifier et que toutes les données en force sont nulles.
- Par conséquent, en invoquant la propriété de décroissance de l'énergie élastique avec la fissuration, tout état de fissuration contenant $\partial_D\Omega$ est sans énergie élastique :

$$\{\Gamma \in \mathcal{F} \mid \quad \Gamma \supset \partial_D\Omega\} \subset \mathcal{F}_0. \tag{2.43}$$

- Il peut en exister d'autres, voire même des fissurations ne touchant pas le bord. Par exemple en 1D, tout état $\{x_1, \ldots, x_n\}$ en est un — ils sont d'ailleurs tous de cette forme. En 3D, dans l'exemple du problème de traction, toute fracture séparant le cylindre en parties connexes de façon à ce que S_0 et S_L ne soient pas dans la même composante connexe correspond à un état de fissuration sans énergie élastique.

Par contre, si l'on adopte des conditions aux limites de *contact unilatéral*, $\mathcal{F}_0$ peut être vide. C'est par exemple le cas dans les problèmes 1D et 3D lorsqu'on exerce un déplacement de compression.

Initiation de la fissuration

Notre formulation permet de rendre compte de la création de fissure dans un milieu sain, contrairement à la théorie de Griffith. La mise en évidence de cette faculté est l'objet de cette sous-section. Commençons par la

Définition 9 (Charge de première fissuration)**.** *Soit Γ_0 l'état de fissuration initial du milieu*[21]*. On appelle charge de première fissuration l'instant t_e à partir duquel une (nouvelle) fissure apparaît :*

$$t_e = sup\{\ t \mid \quad \Gamma(t) = \Gamma_0\} \tag{2.44}$$

A priori on a $0 \leq t_e \leq +\infty$, l'égalité à 0 signifiant une fissuration dès la mise en charge — nous en verrons des exemples par la suite —, un temps de première fissuration infini signifiant que le milieu ne se fissurera jamais au cours du chemin de chargement envisagé — c'est le cas dans les essais de compression 1D et 3D précédents lorsque l'on tient compte des conditions unilatérales de contact. L'objectif de cette sous-section est de déterminer dans quelles conditions une (nouvelle) fissure apparaît, *i.e.* dans quelles conditions a-t-on $t_e < +\infty$. Une partie de la réponse est dans la

21. Γ_0 étant l'ensemble vide si le milieu est dans son état sain au début de la mise en charge.

Proposition 9. *Supposons que l'ensemble des états de fissuration sans énergie élastique n'est pas vide, $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Alors le milieu reste dans son état de fissuration initial si et seulement si cet état est un état sans énergie élastique :*

$$t_e = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma_0 \in \mathcal{F}_0.$$

Preuve. Montrons tout d'abord l'implication : $\Gamma_0 \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow t_e = +\infty$. Si $\Gamma_0 \in \mathcal{F}_0$ alors on a nécessairement, pour tout t, du fait de l'irréversibilité de la fissuration, $\Gamma(t) \in \mathcal{F}_0$ et donc $E_d(\Gamma(t), U_0) = 0$. En reportant dans la loi d'évolution **(L3)**, il vient $E_s(\Gamma(t)) \leq E_s(\Gamma_0)$. Mais comme $\Gamma(t) \supset \Gamma_0$ on a nécessairement l'égalité et donc $\Gamma(t) = \Gamma_0$ pour tout t.

Montrons la réciproque. Si $t_e = +\infty$, alors $\Gamma(t) = \Gamma_0\ \forall t$. La loi d'évolution **(L2)** exige que

$$t^2 E_d(\Gamma_0, U_0) + E_s(\Gamma_0) \quad \leq \quad t^2 E_d(\Gamma, U_0) + E_s(\Gamma) \qquad \forall \Gamma \supset \Gamma_0, \quad \forall t \geq 0.$$

En prenant $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_1 \in \mathcal{F}_0$, on a $\Gamma \in \mathcal{F}_0$ et donc $E_d(\Gamma, U_0) = 0$. L'inégalité précédente devient

$$t^2 E_d(\Gamma_0, U_0) + E_s(\Gamma_0) \quad \leq \quad E_s(\Gamma_0 \cup \Gamma_1), \qquad \forall t \geq 0,$$

ce qui n'est possible que si $E_d(\Gamma_0, U_0) = 0$. □

Si on adopte des conditions aux limites de non contact sur les lèvres des fissures, on est dans les conditions d'application de la Proposition. Par conséquent, si le chargement U_0 et l'état de fissuration initial Γ_0 sont tels que $E_d(\Gamma_0, U_0) > 0$ — ce qui est le cas si $\Gamma_0 = \emptyset$ et si U_0 est incompatible avec des déplacements rigides —, alors une fissure finira par apparaître.

Dans le cas où il n'existe pas d'état de fissuration sans énergie élastique, on a (seulement) la

Proposition 10. *Supposons qu'il n'existe pas d'état de fissuration sans énergie élastique : $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. Alors le milieu reste dans son état de fissuration initial si et seulement si tout état de fissuration le contenant possède la même énergie élastique :*

$$t_e = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_d(\Gamma, U_0) = E_d(\Gamma_0, U_0) \quad \forall \Gamma \supset \Gamma_0.$$

Preuve. Montrons l'implication. Si $t_e = +\infty$, alors $\Gamma(t) = \Gamma_0, \forall t$. La loi d'évolution **(L2)** exige que

$$t^2 E_d(\Gamma_0, U_0) + E_s(\Gamma_0) \quad \leq \quad t^2 E_d(\Gamma, U_0) + E_s(\Gamma) \qquad \forall \Gamma \supset \Gamma_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme l'énergie élastique ne peut pas croître ce n'est manifestement possible que si $E_d(\Gamma, U_0) = E_d(\Gamma_0, U_0)$.

Montrons la réciproque. Si $E_d(\Gamma, U_0) = E_d(\Gamma_0, U_0), \forall \Gamma \supset \Gamma_0$, alors la loi d'évolution **(L3)** exige que $E_s(\Gamma(t)) \leq E_s(\Gamma_0)$. Mais comme $\Gamma(t) \supset \Gamma_0$ on a nécessairement l'égalité et donc $\Gamma(t) = \Gamma_0\ \forall t$. □

Autrement dit, le milieu ne se fissurera pas que si toute fissure n'induit aucun assouplissement. C'était le cas dans l'exemple unidimensionnel pour un chargement de compression en tenant compte de conditions unilatérales de contact.

Fissuration jusqu'à rupture

On pourrait résumer les deux propositions précédentes en disant que la fissuration n'évoluera jamais si et seulement s'il n'existe pas d'état de fissuration contenant l'état de fissuration initial et ayant une énergie élastique moindre. On peut en fait aller un peu plus loin et affirmer que la fissuration évoluera tant que le milieu n'aura pas atteint un état de fissuration de moindre énergie élastique. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette sous-section.

Proposition 11. *Soit* $E_d^m = \inf\{E_d(\Gamma, U_0) \mid \Gamma \supset \Gamma_0\}$. *L'évolution de la fissuration est telle que :*

1. *Le milieu tend vers un état de fissuration de moindre énergie élastique,* i.e. $\lim_{t\to\infty} E_d(\Gamma(t), U_0) = E_d^m$;
2. *Si cet état est atteint en un temps fini alors la fissuration n'évolue plus,* i.e. *s'il existe* $t_r < +\infty$ *tel que* $E_d(\Gamma(t_r), U_0) = E_d^m$, *alors* $\Gamma(t) = \Gamma(t_r), \forall t \geq t_r$.

Preuve.

1. Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante de l'énergie élastique, *i.e.* $\lim_{n\to\infty} E_d(\Gamma_n, U_0) = E_d^m$. Pour tout t, la suite $\Gamma_n \cup \Gamma(t)$ est également une suite minimisante puisque $E_d(\Gamma_n \cup \Gamma(t)), U_0) \leq E_d(\Gamma_n, U_0)$. D'après la loi **(L2)**, on a

$$\begin{aligned} t^2 E_d(\Gamma(t), U_0) + E_s(\Gamma(t)) &\leq t^2 E_d(\Gamma_n \cup \Gamma(t)), U_0) + E_s(\Gamma_n \cup \Gamma(t)) \\ &\leq t^2 E_d(\Gamma_n), U_0) + E_s(\Gamma_n) + E_s(\Gamma(t)) \end{aligned}$$

   et donc

$$E_d(\Gamma(t), U_0) \leq E_d(\Gamma_n, U_0) + \frac{E_s(\Gamma_n)}{t^2}.$$

   En passant successivement à la limite quand $t \to \infty$, puis $n \to \infty$, le résultat suit.

2. Il suffit de reprendre les démonstrations des Propositions précédentes en faisant jouer à $\Gamma(t_r)$ le rôle de Γ_0.

□

Une conséquence immédiate de ce résultat est que s'il existe des états de fissuration sans énergie élastique, alors le milieu tend vers un tel état et la fissuration n'évoluera plus que lorsque un tel état sera atteint. En écartant le cas trivial où l'état de fissuration initial est un état sans énergie élastique, auquel cas il ne se passe rien, on peut définir l'instant critique à partir duquel le milieu est sans énergie élastique comme la charge de rupture.

Définition 10. *Supposons que* $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ *et que* $\Gamma_0 \notin \mathcal{F}_0$. *On appelle charge de rupture l'intensité* t_r *du chargement à partir de laquelle le milieu est sans énergie élastique :*

$$t_r = sup\left\{t : E_d(\Gamma(t), U_0) > 0\right\}.$$

Estimation des charges de première fissuration et de rupture

Nous pouvons donner une estimation à la fois de la charge de première fissuration et de la charge de rupture.

Proposition 12. *Supposons que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ et que $\Gamma_0 \notin \mathcal{F}_0$. La charge de première fissuration t_e et la charge de rupture t_r vérifient les inégalités suivantes :*

$$0 \leq t_e \leq t_m \leq t_r \leq +\infty \qquad avec \qquad t_m \overset{déf}{=} \sqrt{\frac{inf\,\{E_s(\Gamma\backslash\Gamma_0) \mid \Gamma \supset \Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{F}_0\}}{E_d(\Gamma_0, U_0)}}. \tag{2.45}$$

Preuve. Il s'agit de montrer que t_m est un majorant de t_e et un minorant de t_r. Pour la majoration de t_e, utilisons la loi **(L2)** avec $t < t_e$, $\Gamma \in \mathcal{F}_0$, $\Gamma \supset \Gamma_0$:

$$t^2 E_d(\Gamma_0, U_0) + E_s(\Gamma_0) \quad \leq \quad E_s(\Gamma), \qquad \forall t < t_e.$$

En passant à la limite quand $t \to t_e$ et en optimisant Γ, le résultat suit. Pour la minoration de t_r, si $t_r = \infty$ il n'y a rien à montrer, sinon utilisons la loi **(L3)** avec $t > t_r$ et $s = 0$:

$$E_s(\Gamma(t)) \quad \leq \quad t^2 E_d(\Gamma_0, U_0) + E_s(\Gamma_0), \qquad \forall t > t_r.$$

Comme $E_s(\Gamma(t)) - E_s(\Gamma_0) \geq inf\,\{E_s(\Gamma\backslash\Gamma_0) \mid \Gamma \supset \Gamma_0, \Gamma \in \mathcal{F}_0\}$, en passant à la limite quand $t \to t_r$ le résultat suit. □

Essayons de voir dans quelles conditions les inégalités ci-dessus peuvent-elles être des égalités.

⋆ Remarque.

- ⋆ Bien que $\Gamma(0) = \Gamma_0$, on peut avoir $t_e = 0$, *i.e.* la fissuration évoluant dès la mise en charge. Nous en donnons un exemple plus loin.
- ⋆ Le cas $t_e = t_r = +\infty$ correspond au cas où $\Gamma_0 \in \mathcal{F}_0$.
- ⋆ Lorsque $0 < t_e = t_m = t_r < +\infty$ la fissuration apparaît brutalement et correspond à une rupture du milieu. En reprenant les raisonnements qui nous ont permis d'obtenir la minoration de t_r et la majoration de t_e, on constate que l'évolution de la fissuration est alors de la forme :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_0 & si \quad t < t_m \\ \Gamma_m & si \quad t > t_m \end{cases}$$

  où Γ_m est un élément de $\mathcal{F}_0$ contenant Γ_0 et tel que $E_d(\Gamma_m, U_0) = E_d^m$. Les trois exemples traités dans la section précédente sont de ce type. Dans le cas unidimensionnel, la rupture en un point de moindre ténacité est celle qui nécessite le moins d'énergie de surface. Dans le cas du problème de traction 3D, les états de fissuration sans énergie élastique sont ceux qui déconnectent les sections extrêmes S_0 et S_L, et, parmi eux, une fracturation transverse est celui qui nécessite le moins d'énergie de surface. De même, dans le cas du problème d'arrachement d'une armature, les états de fissuration sans énergie élastique sont ceux qui déconnectent les surfaces latérales Σ_m et Σ_a, et, parmi eux, la décohésion de l'armature est celui qui nécessite le moins d'énergie de surface, *i.e.* $\Gamma_m = \Sigma_a$.
- ⋆ Le cas $t_e < t_r = +\infty$ correspond au cas où le milieu tend asymptotiquement vers un état sans énergie élastique sans jamais l'atteindre. Nous n'avons pas d'exemple à proposer.

2.4.2 Fissuration progressive, fissuration brutale et la théorie de Griffith

Cette sous-section et la suivante sont destinées à comparer notre loi d'évolution de la fissuration basée sur un principe de moindre énergie à celle de la théorie de Griffith basée elle sur la notion de taux de restitution d'énergie critique. Pour simplifier, cette comparaison se fera dans un cadre élastique linéaire bidimensionnel. Partant d'un état de fissuration initial $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ — éventuellement vide —, nous supposons que la loi d'évolution **(L0)**–**(L3)** prévoit que la fissuration évoluera en suivant au cours du temps une courbe rectifiable orientée (régulière) d'image Γ, disjointe de Γ_0, de longueur ℓ_r *finie*, d'origine x_0 et d'extrémité x_{ℓ_r}. Cette courbe est paramétrée par son abscisse curviligne : $s \mapsto x(s)$ en prenant l'origine à la pointe x_0. Nous dénotons par Γ_ℓ la réunion de Γ_0 et de la restriction de Γ à sa première partie de longueur ℓ, d'extrémité $x(\ell)$:

$$x(0) = x_0, \qquad \Gamma_\ell = \Gamma_0 \cup \{x(s) \mid 0 \leq s \leq \ell\}, \qquad \Gamma(t) = \Gamma_{\ell(t)}, \ \forall t.$$

Notons que, comme nous sommes amenés à ne considérer que des états de fissuration de la forme Γ_ℓ, l'énergie élastique et l'énergie de surface ne sont fonctions que de ℓ :

$$F(\ell) \overset{déf}{=} E_d(\Gamma_\ell, U_0), \qquad H(\ell) \overset{déf}{=} E_s(\Gamma_\ell) = E_s(\Gamma_0) + \int_0^\ell k(x(s), n(s))\, ds. \tag{2.46}$$

Ces fonctions sont respectivement positive décroissante et positive croissante et nous les supposerons en outre aussi régulières que le contexte l'exigera (continues, continûment dérivables, ...). Le trajet de la fissure étant ainsi prédéfini, il reste à préciser la loi horaire de la fissuration, *i.e.* la fonction $t \mapsto \ell(t)$ donnant la position de la pointe de la fissure en fonction du temps. L'évolution de la fissuration sera régulière en temps suivant que la fonction $t \mapsto \ell(t)$ l'est ou non. Nous allons commencer par étudier le cas d'une propagation régulière.

Fissuration progressive et la loi de Griffith

Énonçons tout de suite le résultat.

Proposition 13. *Si $t \mapsto \ell(t)$ est absolument continue, alors l'évolution de la fissuration suit la loi de Griffith,* i.e. *$t \mapsto \ell(t)$ vérifie pour presque tout t :*

(G0)	**La condition initiale :**	$\ell(0) = 0;$
(G1)	**La condition d'irréversibilité :**	$\dfrac{d\ell}{dt}(t) \geq 0;$
(G2)	**Le critère de Griffith :**	$-t^2 \dfrac{dF}{d\ell}(\ell(t)) \leq k(x(\ell(t)), n(\ell(t)))\,;$
(G3)	**La condition d'évolution :**	$\dfrac{d\ell}{dt}(t) = 0 \quad si \quad -t^2 \dfrac{dF}{d\ell}(\ell(t)) < k(x(\ell(t)), n(\ell(t))).$

Preuve. Comme $t \mapsto \ell(t)$ est supposée absolument continue, elle est dérivable pour presque tout t et **(G1)** est une conséquence directe de la condition d'irréversibilité **(L1)**. Établissons **(G2)**. Pour cela écrivons **(L2)** à un instant t en prenant pour état de fissuration test $\Gamma_{\ell(t)+h}, h > 0$:

$$t^2 F(\ell(t)) + H(\ell(t)) \leq t^2 F(\ell(t) + h) + H(\ell(t) + h).$$

En divisant par h et en passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient **(G2)**. En remplaçant $\ell(t)+h$ par $\ell(t+h)$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\frac{d\ell}{dt}(t)\left(-t^2\frac{dF}{d\ell}(\ell(t))-k(x(\ell(t)),n(\ell(t)))\right)\leq 0.$$

En écrivant **(L2)** à l'instant t avec $s=t-h$, en divisant par h et en passant à la limite quand h tend vers 0, on trouve l'inégalité inverse, d'où finalement l'égalité :

$$\frac{d\ell}{dt}(t)\left(-t^2\frac{dF}{d\ell}(\ell(t))-k(x(\ell(t)),n(\ell(t)))\right)=0, \tag{2.47}$$

qui n'est rien d'autre que **(G3)**. □

⋆ Remarque.

- ⋆ **(G2)** n'est évidemment rien d'autre que le critère de Griffith, puisque $-t^2\dfrac{dF}{d\ell}(\ell(t))$ représente le taux de restitution d'énergie élastique.
- ⋆ **(G3)** est l'hypothèse usuelle pour une loi à seuil demandant qu'il n'y ait pas de propagation de la fissure tant que le taux de restitution d'énergie n'a pas atteint une valeur critique — ici $k(x,n)$ — caractéristique du matériau.
- ⋆ Soulignons le fait qu'ici cette loi d'évolution est une conséquence de notre principe de moindre énergie et qu'elle ne vaut que dans la mesure où l'évolution est régulière. On peut donc dire que la loi d'évolution de Griffith devient ici une condition nécessaire d'optimalité pour les évolutions régulières.

Fissuration brutale et le critère de Griffith généralisé

Envisageons maintenant une évolution non régulière de la fissuration en supposant qu'il y a une fissuration brutale à l'instant t_0, autrement dit que $t\mapsto\ell(t)$ est discontinue à l'instant t_0, ses limites à gauche et à droite étant notées respectivement $\ell^-(t_0)$ et $\ell^+(t_0)$, $\ell^-(t_0)\neq\ell^+(t_0)$. On a alors

Proposition 14. *Si l'évolution de la fissuration est discontinue à l'instant t_0, alors t_0, $\ell^+(t_0)$ et $\ell^-(t_0)$ sont liés par la relation de saut suivante :*

(G4) Le critère de Griffith généralisé : $-t_0^2(F(\ell^+(t_0))-F(\ell^-(t_0)))=H(\ell^+(t_0))-H(\ell^-(t_0))$.

Preuve. Écrivons la loi **(L2)** à l'instant t_0-h en prenant pour état de fissuration test $\Gamma(t_0+h)$:

$$(t_0-h)^2(F(\ell(t_0-h))+H(\ell(t_0-h)\leq(t_0-h)^2(F(\ell(t_0+h))+H(\ell(t_0+h).$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, il vient :

$$-t_0^2(F(\ell^+(t_0))-F(\ell^-(t_0)))\leq H(\ell^+(t_0))-H(\ell^-(t_0)).$$

Écrivons la loi **(L3)** à l'instant $t_0 + h$ en prenant pour état de fissuration antérieur $\Gamma(t_0 - h)$:

$$(t_0 + h)^2(F(\ell(t_0 + h)) + H(\ell(t_0 + h) \leq (t_0 + h)^2(F(\ell(t_0 - h)) + H(\ell(t_0 - h).$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, il vient :

$$-t_0^2(F(\ell^+(t_0)) - F(\ell^-(t_0))) \geq H(\ell^+(t_0)) - H(\ell^-(t_0)),$$

i.e. l'inégalité inverse de celle obtenue auparavant, d'où **(G4)**. □

⋆ Remarque. Ce résultat appelle quelques commentaires.

- ⋆ Cette condition de saut n'est pas sans rappeler les conditions de saut de Rankine-Hugoniot à la traversée d'une onde de choc. Elle n'est en fait rien d'autre qu'une condition de conservation de l'énergie totale du milieu lors d'une fissuration brutale, la restitution d'énergie élastique — le premier membre de **(G4)** — venant compenser exactement l'accroissement d'énergie de surface — le second membre de **(G4)**. Par rapport au critère de Griffith habituel, on a simplement remplacé les dérivées des énergies par leurs accroissements.
- ⋆ Si le milieu est homogène et isotrope, la ténacité est indépendante de x et de n, $k(x, n) = \kappa$, et la relation de saut s'interprète comme un critère de propagation portant sur le taux de restitution d'énergie *moyen* :

$$\frac{1}{\ell^+(t_0) - \ell^-(t_0)} \int_{\ell^-(t_0)}^{\ell^+(t_0)} -t_0^2 \frac{dF}{d\ell}(\ell) d\ell = \kappa \tag{2.48}$$

- ⋆ Cette relation de saut a été *postulée* récemment par Hashin dans [27] alors qu'elle est ici une conséquence des lois d'évolution **(L0)**–**(L3)**. Notons qu'elle ne fournit qu'*une* relation entre les *trois* quantités : la valeur du chargement t_0 et les états de fissuration avant $\ell^-(t_0)$ et après $\ell^+(t_0)$. Seule, elle n'est pas capable de prédire à la fois quand et comment la fissuration brutale aura lieu, alors que, comme nous allons le voir, **(L0)**–**(L3)** le peuvent.

2.4.3 Fissuration progressive ou fissuration brutale ?

Le rôle de la convexité

Dans les deux paragraphes précédents la régularité ou non de l'évolution de la fissuration était présupposée. Il s'agit de trouver dans quelles circonstances il y aura fissuration progressive ou au contraire fissuration brutale. La réponse passe par l'étude complète du problème d'évolution. Effectuons au préalable le changement de variable suivant :

$$\lambda = H(\ell), \qquad \hat{F} = F \circ H^{-1}, \tag{2.49}$$

ce qui revient à prendre comme variable d'état de la fissuration, non plus sa longueur, mais son énergie de surface — ce changement étant licite puisque H est strictement croissante et (absolument) continue. Dans le contexte actuel le problème d'évolution s'écrit :

Loi 3 (Évolution de l'énergie de surface de la fissure)**.** *Trouver* $t \mapsto \lambda(t)$ **croissante** *telle que*

(F1) **Condition initiale :** $\lambda(0) = 0$;

(F2) **Première condition d'optimalité :** $t^2\hat{F}(\lambda(t)) + \lambda(t) \leq t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda, \qquad \forall \lambda \geq \lambda^-(t)$;

(F3) **Seconde condition d'optimalité :** $t^2\hat{F}(\lambda(t)) + \lambda(t) \leq t^2\hat{F}(\lambda(s)) + \lambda(s), \qquad \forall s \leq t.$

Les deux Propositions qui suivent montrent que la régularité de l'évolution tient à la convexité de $\hat{F}$.

Proposition 15. *Si* $\hat{F}$ *est continûment dérivable et strictement convexe, alors le problème d'évolution admet pour unique solution la fonction croissante continue* $t \mapsto \lambda(t)$ *suivante :*

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t \leq t_e, \\ \hat{F}'^{-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right) & si \quad t_e \leq t \leq t_r, \\ H(\ell_r) & si \quad t \geq t_r, \end{cases} \qquad avec \qquad t_e = \frac{1}{\sqrt{-\hat{F}'(0)}}, \quad t_r = \frac{1}{\sqrt{-\hat{F}'(H(\ell_r))}}. \tag{2.50}$$

Preuve. Vérifions d'abord que cette évolution est bien solution.

(i) Elle est croissante et continue puisque, $\hat{F}$ étant continûment dérivable et strictement convexe, sa dérivée est continue et strictement croissante, mettant en bijection les intervalles $[0, H(\ell_r)]$ et $[\hat{F}'(0), \hat{F}'(H(\ell_r))] = [-\frac{1}{t_e^2}, -\frac{1}{t_r^2}]$.

(ii) $\lambda(t)$ réalise le minimum de $t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda$ sur l'intervalle $[0, H(\ell_r)]$. En effet, du fait de la convexité de $\hat{F}$, le minimum est respectivement atteint en 0 si $t^2\hat{F}'(0) + 1 \geq 0$, en $H(\ell_r)$ si $t^2\hat{F}'(H(\ell_r)) + 1 \leq 0$ et en λ tel que $t^2\hat{F}'(\lambda) + 1 = 0$ sinon.

(iii) Cette propriété de minimum de $\lambda(t)$ garantit la vérification de **(F2)** et **(F3)**.

Montrons maintenant que c'est la seule solution. Soit $t \mapsto \hat{\lambda}(t)$ une solution.

(1) Comme $\hat{\lambda}(0) = 0$, que **(F3)** impose que $t^2\hat{F}(\hat{\lambda}(t)) + \hat{\lambda}(t) \leq t^2\hat{F}(0)$ et que 0 est l'unique minimiseur quand $t \leq t_e$, on a nécessairement $\hat{\lambda}(t) = 0$ si $0 \leq t \leq t_e$.

(2) Comme **(F2)** impose que $t^2\hat{F}(\hat{\lambda}(t)) + \hat{\lambda}(t) \leq t^2\hat{F}(H(\ell_r)) + H(\ell_r)$ et que $H(\ell_r)$ est l'unique minimiseur quand $t \geq t_r$, on a nécessairement $\hat{\lambda}(t) = H(\ell_r)$ si $t \geq t_r$.

(3) $\hat{\lambda}(t)$ est continue en t_e et en t_r. En effet, le critère de Griffith généralisé impose la continuité de l'énergie et donc

$$t_e^2\hat{F}(\hat{\lambda}^+(t_e)) + \hat{\lambda}^+(t_e) = t_e^2\hat{F}(0), \qquad t_r^2\hat{F}(\hat{\lambda}^-(t_r)) + \hat{\lambda}^-(t_r) = t_r^2\hat{F}(H(\ell_r)) + H(\ell_r).$$

Mais comme 0 et $H(\ell_r)$ sont les seuls minimiseurs respectivement en t_e et en t_r, on a $\hat{\lambda}^+(t_e) = 0$ et $\hat{\lambda}^-(t_r) = H(\ell_r)$.

(4) Montrons que $\hat{\lambda}(t)$ est continue en tout t. Il reste à le vérifier si $t_e < t < t_r$. Du fait de la continuité de l'énergie et de **(F2)**, on a

$$t^2\hat{F}(\hat{\lambda}^-(t)) + \hat{\lambda}^-(t) \quad = \quad t^2\hat{F}(\hat{\lambda}^+(t)) + \hat{\lambda}^+(t) \quad \leq \quad t^2\hat{F}(\hat{\lambda}) + \hat{\lambda} \qquad \forall \hat{\lambda} \geq \hat{\lambda}^-(t).$$

Comme $t^2\hat{F}(\hat{\lambda}) + \hat{\lambda}$ est d'abord strictement décroissante, puis minimale en $\hat{F}'^{-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ et enfin strictement croissante, on a nécessairement $\hat{\lambda}^-(t) = \hat{\lambda}^+(t) \geq \hat{F}'^{-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)$, d'où la continuité annoncée.

(5) $t \mapsto \hat{\lambda}(t)$ étant continue et croissante de 0 à $H(\ell_r)$, elle prend toutes les valeurs dans l'intervalle.

Mais alors **(F2)** et **(F3)** exigent que $\hat{\lambda}(t)$ minimise $t^2\hat{F}(\hat{\lambda}) + \hat{\lambda}$ sur l'intervalle $[0, H(\ell_r)]$. Du fait de la stricte convexité de $\hat{F}$ ce minimiseur est unique, et donc, d'après (ii), $\hat{\lambda} = \lambda$. □

⋆ Remarque. Dans l'intervalle $[t_e, t_r]$ où la fissure croît continûment, le critère de Griffith **(G2)** est vérifié. C'est d'ailleurs lui qui fournit la valeur de $\lambda(t)$. La convexité de $\hat{F}$ joue évidemment un rôle essentiel tout au long de la démonstration. Mais le caractère strict de la convexité est également important. Par exemple si $\hat{F}(\lambda)$ est linéaire sur l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$, alors $\lambda(t)$ sautera de λ_1 à λ_2 à l'instant $t = \left(-\hat{F}'(\lambda_1)\right)^{-1/2} = \left(-\hat{F}'(\lambda_2)\right)^{-1/2}$. Par contre, la régularité de $\hat{F}$ n'intervient que pour la croissance stricte de la fissuration. Si sa dérivée est discontinue en un point λ, alors $\lambda(t)$ restera à la valeur λ sur tout l'intervalle de temps $[\left(-\hat{F}'(\lambda-)\right)^{-1/2}, \left(-\hat{F}'(\lambda+)\right)^{-1/2}]$.

Proposition 16. *Si $\hat{F}$ est concave, alors l'évolution est brutale, le problème d'évolution admettant pour unique solution :*

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le t < t_r, \\ H(\ell_r) & si \quad t > t_r, \end{cases} \qquad avec \qquad t_r = \sqrt{\frac{H(\ell_r)}{F(\ell_0) - F(\ell_r)}}. \tag{2.51}$$

Preuve. Commençons par la minimisation de $\lambda \mapsto t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda$ sur l'intervalle $[0, H(\ell_r)]$, le minimum étant atteint puisqu' on minimise une fonction concave bornée — donc continue — sur un compact. Comme $\hat{F}$ est concave, il est facile de voir que le minimum est atteint uniquement en 0 si $t < t_r$, et, uniquement en $H(\ell_r)$ si $t > t_r$. Mais l'utilisation conjointe de **(F2)** et **(F3)** fournit

$$t^2\hat{F}(\lambda(t)) + \lambda(t) \le t^2\hat{F}(0), \qquad t^2\hat{F}(\lambda(t)) + \lambda(t) \le t^2\hat{F}(H(\ell_r)) + H(\ell_r),$$

et donc

$$t^2\hat{F}(\lambda(t)) + \lambda(t) \le \min\left\{t^2\hat{F}(0); t^2\hat{F}(H(\ell_r)) + H(\ell_r)\right\} = \min_{\lambda \in [0, H(\ell_r)]}\left\{t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda\right\}$$

qui demande que $\lambda(t)$ soit le minimiseur de $t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda$, d'où le résultat. □

⋆ Remarque. L'état de fissuration n'est pas défini à la charge de rupture t_r. On peut aussi bien avoir $\lambda(t_r) = 0$ que $\lambda(t_r) = H(\ell_r)$. Au changement de notations près, le saut en t_r satisfait le critère de Griffith généralisé **(G4)**. On peut même considérer que ce critère fournit ici la charge de rupture t_r puisque le saut de λ est donné.

On peut traiter le cas général, *i.e.* sans hypothèse de convexité sur $\hat{F}$. On commence par établir la

Proposition 17. *Si $\hat{F}$ est continue, alors le problème d'évolution admet pour unique(s) solution(s) le(s) fonction(s) $t \mapsto \lambda(t)$ telle(s) que $\lambda(t)$ minimise $t^2\hat{F}(\lambda) + \lambda$ sur $[0, H(\ell_r)]$.*

Preuve. Comme $\hat{F}$ est continue sur un compact, $t^2\hat{F}(\lambda)+\lambda$ sur $[0, H(\ell_r)]$ atteint son minimum en un (plusieurs) point(s). Choisissons un de ces points et désignons le par $\lambda(t)$. Il est facile de vérifier que $\lambda(t)$ est une fonction croissante de t valant 0 en $t=0$. Du fait-même de sa définition elle vérifie **(F2)** et **(F3)**, elle est donc une solution du problème d'évolution. Montrons qu'elles sont toutes de cette forme. Soit $t \mapsto \lambda(t)$ une solution. Il suffit de montrer que l'on a, pour tout $\lambda \in [0, \lambda^-(t)]$,

$$t^2\hat{F}(\lambda(t))+\lambda(t) \quad \leq \quad t^2\hat{F}(\lambda)+\lambda, \tag{2.52}$$

car alors, l'inégalité étant vraie pour $\lambda \geq \lambda^-(t)$ d'après **(F2)**, $\lambda(t)$ sera un minimiseur de $t^2\hat{F}(\lambda)+\lambda$ sur tout l'intervalle $[0, H(\ell_r)]$. Comme $\lambda(t)$ est une fonction croissante de t, elle est discontinue sur un ensemble au plus dénombrable de points. Soient t_{i-1} et t_i, avec $t_{i-1} < t_i < t$, les instants correspondants à deux sauts consécutifs antérieurs à l'instant t considéré, $\lambda_{i-1}^{\pm}$ et $\lambda_i^{\pm}$ les limites avant ou après de chacun de ces sauts. Comme, d'après **(F3)**, l'inégalité (2.52) est vraie sur l' intervalle $\left(\lambda_{i-1}^+, \lambda_i^-\right)$ puisque toutes ces valeurs sont prises à un instant $s \in (t_{i-1}, t_i)$, il ne reste plus qu'à l'établir pour l' intervalle $\left[\lambda_i^-, \lambda_i^+\right]$. Or, en utilisant **(F3)** avec $s = t_i + h$ et en passant à la limite quand $h \to 0$, on a

$$t^2\hat{F}(\lambda(t))+\lambda(t) \quad \leq \quad t^2\hat{F}(\lambda_i^+)+\lambda_i^+. \tag{2.53}$$

De plus, en utilisant **(F2)** et **(G4)**, il vient

$$t_i^2\hat{F}(\lambda_i^-)+\lambda_i^- \quad = \quad t_i^2\hat{F}(\lambda_i^+)+\lambda_i^+ \quad \leq \quad t_i^2\hat{F}(\lambda)+\lambda \qquad \forall \lambda \geq \lambda_i^-. \tag{2.54}$$

Mais alors, en utilisant (2.54) et la décroissance de $\hat{F}$, il vient pour tout $\lambda \in \left[\lambda_i^-, \lambda_i^+\right]$

$$\begin{aligned} t^2\hat{F}(\lambda_i^+)+\lambda_i^+ &= (t^2-t_i^2)\hat{F}(\lambda_i^+)+t_i^2\hat{F}(\lambda_i^+)+\lambda_i^+ \\ &\leq (t^2-t_i^2)\hat{F}(\lambda)+t_i^2\hat{F}(\lambda)+\lambda \quad = \quad t^2\hat{F}(\lambda)+\lambda \end{aligned}$$

qui combinée avec (2.53) fournit l'inégalité cherchée. □

En pratique pour déterminer $\lambda(t)$, on peut utiliser le fait que le minimum de $t^2\hat{F}(\lambda)+\lambda$ coïncide avec celui de $t^2\hat{F}^{**}(\lambda)+\lambda$, $\hat{F}^{**}$ désignant la convexifiée de $\hat{F}$ [22]. En s'aidant des résultats précédents, on voit alors que la fissuration est continue sur les parties strictement convexes de $\hat{F}^{**}$ et discontinue sur les parties linéaires.

Exemple. Considérons une fonction $\hat{F}$ comme celle représentée sur la figure suivante : concave au voisinage de 0 et de λ_r, convexe entre, sa convexifiée coïncidant dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ et étant linéaire en dehors.

Figure 2.6 – *Exemple de fonction $\hat{F}$ non convexe et de sa convexifiée $\hat{F}^{**}$.*

22. parfois appelée la bipolaire ou encore la Γ-régularisée de $\hat{F}$.

L'évolution de la fissuration est donnée par

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < t_e, \\ 0 \ ou \ \lambda_1 & si \quad t = t_e, \\ \hat{F}'^{-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right) & si \quad t_e \leq t \leq t_r, \\ \lambda_2 \ ou \ \lambda_r & si \quad t = t_r, \\ \lambda_r & si \quad t > t_r, \end{cases} \tag{2.55}$$

avec

$$\lambda_r = H(\ell_r), \qquad t_e = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\hat{F}(0) - \hat{F}(\lambda_1)}} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{F}'(\lambda_1)}}, \qquad t_r = \sqrt{\frac{\lambda_r - \lambda_2}{\hat{F}(\lambda_2) - \hat{F}(\lambda_r)}} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{F}'(\lambda_2)}}. \tag{2.56}$$

Il y a un premier saut à l'instant t_e, la fissuration passant de 0 à λ_1, suivi d'une fissuration progressive, la fissuration évoluant continûment de λ_1 à λ_2, et pour finir un deuxième saut à l'instant t_r, la fissuration passant de λ_2 à λ_r qui correspond à la rupture. On notera dans les expressions donnant (t_e, λ_1) d'une part et (t_r, λ_2) d'autre part que la première égalité correspond au critère de Griffith généralisé alors que la deuxième correspond au critère de Griffith usuel.

Résumons les résultats de cette sous-section en comparant les résultats prévus par notre formulation avec ceux de la théorie de Griffith.

⋆ Remarque.

- ⋆ Quand $\hat{F}$ est strictement convexe et régulière, les résultats sont identiques ;
- ⋆ Quand $\hat{F}$ est concave, la théorie de Griffith prévoit que la fissuration s'initiera à un instant t_i fournit par le critère de Griffith : $t_i^2 \hat{F}'(0) = -1$. *Mais*, du fait de la concavité de $\hat{F}$, le critère de Griffith ne pourra plus être vérifié après : $-t^2 \hat{F}'(\lambda) > 1$, pour tout $t > t_i$ et tout $\lambda \geq 0$. Autrement dit, *stricto sensu*, le problème **(G1)**–**(G3)** *n'a plus de solution.* La fissure est décrétée instable, elle est sensée se propager, mais on ne sait pas jusqu'où. On pourrait décréter qu'il y a rupture à l'instant t_i et que λ saute de 0 à λ_r, mais ce en violant les lois, que ce soit le critère de Griffith usuel **(G2)** ou le critère de Griffith généralisé **(G4)**. De plus, toujours du fait de la concavité de $\hat{F}$, la charge d'initiation de la fissuration t_i prévue par le critère de Griffith est toujours supérieure ou égale à la charge de première fissuration *et* de rupture t_r prévue par notre formulation — l'égalité n'ayant lieu que si $\hat{F}$ est linéaire. Remarquons d'ailleurs que $t_i = \infty$ si $\hat{F}'(0) = 0$, autrement dit que, selon la théorie de Griffith, la fissuration n'évoluera jamais si le taux de restitution d'énergie est nul en $\lambda = 0$. Cette situation qui est loin d'être exceptionnelle, comme nous allons le voir dans la sous-section suivante, met en lumière toutes les insuffisances de la théorie de Griffith, qui par essence, n'est pas apte à gérer les phénomènes de propagation brutale.
- ⋆ Dans le cas général, les deux approches fournissent des résultats différents. Ainsi, dans l'exemple précédent où, d'après la figure, $\hat{F}'(0) = 0$, la théorie de Griffith prévoit qu'il n'y aura *jamais* fissuration.

Le rôle des singularités

Dans la théorie de Griffith, les singularités des déplacements et des contraintes jouent un rôle essentiel. En particulier, en bidimensionnel, c'est parce que le champ des déplacements est singulier comme $\sqrt{r}$ à la pointe d'une fissure que le taux de restitution d'énergie G est fini et non nul, la formule d'Irwin reliant alors G aux coefficients d'intensité des contraintes. Nous nous proposons de montrer que les singularités jouent également un rôle important dans notre formulation, en particulier dans le caractère progressif ou brutal de la fissuration. Nous nous plaçons pour cela dans un cadre bidimensionnel et adoptons quelques hypothèses simplificatrices afin d'alléger la présentation.

Hypothèse. *Le milieu est bidimensionnel, linéairement élastique et dans un état de fissuration initial* Γ_0. *On suppose que le champ des déplacements du milieu à l'équilibre sous un chargement unitaire, soit* $u(\Gamma_0)$, *présente, au voisinage d'un nombre fini de points* $\big(x_i\big)_{1\leq i\leq n}$, *une singularité en* r^{α_i}, *avec* $0<\alpha_i<1$, i.e. *en dénotant par* $[r_i,\theta_i]$ *le système de coordonnées polaires de pôle* x_i *:*

$$u(\Gamma_0)(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i^{\alpha_i} v_i(\theta_i)+\hat{u}(x), \qquad \hat{u}\in H^2(\Omega\backslash\Gamma_0,\mathbb{R}^2).$$

De plus la ténacité est supposée constante dans un voisinage de chaque point x_i, i.e. $k(x,n)=\kappa_i$ *dans ce voisinage.*

⋆ Remarque. Le coefficient de la singularité α_i doit être positif pour que l'énergie élastique $E_d(\Gamma_0,U_0)$ soit finie, inférieur à 1 pour qu'il s'agisse effectivement d'une singularité, *i.e.* $u(\Gamma_0)\notin H^2(\Omega\backslash\Gamma_0,\mathbb{R}^2)$. En pratique, les x_i correspondent aux points anguleux de la frontière — pointe de fissure par exemple —, aux points de la frontière où il y a un changement de conditions aux limites — passage de conditions de Dirichlet à des conditions de Neumann par exemple — ou aux points anguleux d'interfaces, cf. [26] et [25].

Nous nous proposons d'étudier en quoi la présence de telles singularités influence la fissuration, en particulier l'instant t_e et le caractère brutal ou progressif de la première fissuration. Il faut pour cela évaluer la restitution d'énergie élastique provoquée par un défaut de petite taille. Cette estimation a été faite par D. Leguillon [33] et fait l'objet de la Proposition suivante.

Proposition 18 (D. Leguillon, [33])**.** *Soit* Γ_ℓ *une fissure de longueur* ℓ, *supposée petite, placée au voisinage d'un point singulier* x_0 [23] *où la singularité est en* r^α. *Alors l'énergie élastique associé à l'état de fissuration* $\Gamma_0\cup\Gamma_\ell$ *est donnée par :*

$$E_d(\Gamma_0\cup\Gamma_\ell,U_0)=E_d(\Gamma_0,U_0)-K\,\ell^{2\alpha}+o(\ell^{2\alpha}), \qquad K>0. \tag{2.57}$$

⋆ Remarque. Dans [33], le résultat est montré en utilisant la technique des développements asymptotiques raccordés. On voit qu'il fournit essentiellement l'ordre de grandeur de la restitution d'énergie due à un défaut de petite taille en fonction du coefficient de la singularité. Le coefficient K dépend à la

23. *i.e.* Γ_ℓ est dans une boule de centre x_0 et de rayon tendant vers 0 avec ℓ

fois de la forme du défaut et de la singularité du champ en x_0 en l'absence de défaut — en particulier des facteurs d'intensité des contraintes —, mais pas de la taille du défaut. Le résultat reste valable si le coefficient α de la singularité est complexe, à condition de remplacer α par sa partie réelle dans (2.57). On peut aussi utiliser (2.57) si le petit bout de fissure Γ_ℓ ne se situe pas au voisinage d'un point singulier en prenant $\alpha = 1$ et $K \geq 0$. Notons que (2.57) montre que le taux de restitution d'énergie n'est fini et non nul en $\ell = 0$ que si $\alpha = 1/2$ — il vaut alors K —, qu'il tend vers l'infini comme $\ell^{2\alpha-1}$ si $\alpha < 1/2$ — on parlera alors de *singularité forte* — et qu'il tend vers 0 comme $\ell^{2\alpha-1}$ si $\alpha > 1/2$ — on parlera alors de *singularité faible*.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'influence des singularités sur l'apparition de la fissuration.

Proposition 19. *Le milieu étant dans l' état de fissuration Γ_0 est soumis à un chargement linéaire croissant. Suivant le type de points singuliers que contient le champ des déplacements $u(\Gamma_0)$, la première fissuration présentera les caractéristiques suivantes :*

(i) *S'il existe des points x_i ayant une* **singularité forte**, i.e. *avec $0 < \alpha_i < 1/2$, alors il y a fissuration* **progressive** *au voisinage de ces points* **dès la mise en charge**, i.e. *$t_e = 0$, et la longueur ℓ_i du défaut au voisinage de ces points croît continûment avec t, pour des t petits, suivant une loi puissance :*

$$\ell_i(t) \approx \left(2\alpha_i \frac{K_i}{\kappa_i} t^2\right)^{\frac{1}{1-2\alpha_i}} ; \tag{2.58}$$

(ii) *Si les points les plus singuliers ont une* **singularité en** $\sqrt{r}$, i.e. *si $\min_i \alpha_i = 1/2$, alors la fissuration apparaîtra* **en un temps fini non nul**, i.e. *$0 < t_e < \infty$, cette première fissuration pouvant être brutale ou progressive ;*

(iii) *Si tous les points singuliers ont une* **singularité faible**, i.e. *si $1/2 < \alpha_i < 1$ pour tout i, alors la fissuration apparaîtra* **brutalement en un temps fini non nul**, i.e. *$0 < t_e < \infty$ et $\Gamma^+(t_e) \neq \Gamma_0$;*

(iv) *S'il n'existe pas de point singulier, alors soit il n'y aura jamais fissuration,* i.e. *$t_e = \infty$, soit la fissuration apparaîtra* **brutalement en un temps fini non nul**, i.e. *$0 < t_e < \infty$ et $\Gamma^+(t_e) \neq \Gamma_0$.*

Preuve. Pour l'essentiel la démonstration de ces propriétés s'appuie sur (2.57) et sur le fait que la fonction $\ell \mapsto -\ell^p$ est strictement convexe si $0 < p < 1$, linéaire si $p = 1$, et strictement concave si $p > 1$. Envisageons tour à tour chaque cas prévu dans l'énoncé.

(i) Montrons que $t_e = 0$ par l'absurde. Sinon, si $t_e > 0$, plaçons-nous à un instant t tel que $0 < t < t_e$ et envisageons, au voisinage d'un point à singularité forte x_i, un petit défaut Γ_{ℓ_i} de longueur ℓ_i donnée par (2.58). Alors, en utilisant (2.57), l'énergie du milieu dans cet état de fissuration vérifie, pour t assez petit :

$$E(\Gamma_0 \cup \Gamma_{\ell_i}, t) = E(\Gamma_0, t) - \big(\frac{1}{2\alpha_i} - 1\big)\kappa_i \ell_i + o(\ell_i) < E(\Gamma_0, t),$$

ce qui contredit **(L2)**. Donc $t_e = 0$. Montrons que la fissuration est nécessairement progressive au voisinage de $t = 0$, *i.e.* $\Gamma^+(0) = \Gamma_0$. En utilisant **(L3)** avec $s = 0$ et en faisant tendre t vers 0, il vient à la limite :

$$E_s(\Gamma^+(0)) \quad \leq \quad \lim_{t \to 0} E_s(\Gamma(t)) \quad \leq \quad E_s(\Gamma_0),$$

mais comme $\Gamma^+(0)$ contient Γ_0 on a nécessairement l'égalité. Par conséquent, pour t suffisamment petit, l'état de fissuration $\Gamma(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\Gamma(t)\backslash\Gamma_0 = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_{\ell_i(t)},$$

où les $\Gamma_{\ell_i(t)}$, pour $1 \leq i \leq n$, sont des petits défauts de longueur $\ell_i(t)$ — éventuellement nulle — situés dans un voisinage des points singuliers x_i, et où $\Gamma_{\ell_0(t)}$ représente d'éventuels petits défauts de longueur totale $\ell_0(t)$ — petite et éventuellement nulle — situés au voisinage de points non singuliers. En posant $\alpha_0 = 1$ et en utilisant (2.57), l'énergie du milieu à un instant t petit s'écrit :

$$E(\Gamma(t), t) = E(\Gamma_0, t) + \sum_{i=0}^{n} \left(-t^2 \left(K_i \ell_i(t)^{2\alpha_i} + o_i\left(\ell_i(t)^{2\alpha_i}\right)\right) + \kappa_i \ell_i(t)\right).$$

En adaptant les résultats de la sous-section précédente, on voit que d'une part $\ell_i(t)$ doit tendre vers 0 avec t et d'autre part qu'il doit minimiser $-t^2\left(K_i \ell^{2\alpha_i} + o_i\left(\ell^{2\alpha_i}\right)\right) + \kappa_i \ell$. Lorsque $\alpha_i \geq 1/2$, l'énergie de surface l'emporte sur la restitution d'énergie élastique et on a nécessairement $\ell_i(t) = 0$. Par contre, lorsque $\alpha_i < 1/2$, le minimum est atteint en $\ell_i(t)$ donné par (2.58), qui est bien croissant depuis 0. D'où le résultat annoncé.

(ii) Supposons maintenant qu'il n'existe pas de point fortement singulier. On a nécessairement $t_e > 0$, sinon on pourrait reprendre le raisonnement fait en (i) qui conduirait à $\ell_i(t) = 0$ pour tout i et t voisin de 0, *i.e.* à $\Gamma(t) = \Gamma_0$, ce qui constituerait une contradiction. On a également $t_e < \infty$, car l'égalité ne peut avoir lieu, en vertu de la Proposition 10, que si l'énergie élastique est minimale pour l'état de fissuration Γ_0, ce qui n'est pas le cas, d'après (2.57), dès lors que $u(\Gamma_0)$ est singulier.

(iii) Grâce au raisonnement précédent, on a toujours $0 < t_e < \infty$. Montrons que $\Gamma^+(t_e) \neq \Gamma_0$ en reprenant le raisonnement fait en (i). Sinon $\ell_i(t)$ devrait d'une part tendre vers 0 lorsque $t \mapsto t_e$ et d'autre part minimiser $-t^2\left(K_i \ell^{2\alpha_i} + o_i\left(\ell^{2\alpha_i}\right)\right) + \kappa_i \ell$. Mais comme $2\alpha_i > 1$, l'énergie de surface l'emporte sur la restitution d'énergie élastique pour de faibles valeurs de ℓ et on aurait nécessairement $\ell_i(t) = 0$ pour t voisin de t_e, ce qui est contradictoire avec la définition de t_e. À noter que nous ne pouvions faire ce raisonnement en (ii) car les deux énergies sont du même ordre si $\alpha_i = 1/2$.

(iv) Ce cas a en fait déjà été étudié en (ii) et (iii).

□

⋆ <u>Remarque</u>.

- ⋆ On comprend mieux à la lecture de ces propriétés pourquoi notre formulation réussit là où échoue la théorie de Griffith. Le taux de restitution d'énergie d'une fissure naissante loin d'une singularité forte étant nul, le critère de Griffith ne peut jamais être atteint et aucune fissure ne peut se créer progressivement. Par contre, en envisageant la création brusque d'une fissure de longueur finie et en adoptant un critère de Griffith généralisé, *i.e.* en fait un critère portant sur le taux de restitution d'énergie moyen, des fissures peuvent apparaître pour des chargements finis. Lorsque le milieu a initialement un champ de déplacement singulier en $\sqrt{r}$ — ce qui est souvent le cas lorsque le milieu est préfissuré — , on ne peut conclure quant au caractère brutal ou progressif de la première fissuration, les deux situations pouvant alors se présenter.

- ⋆ En présence d'une singularité forte — c'est le cas par exemple en élasticité antiplane, à la pointe d'un coin rentrant où il y a un changement de type de conditions aux limites (Neumann-Dirichlet), cf. [26] — , la fissuration étant progressive, elle suit la loi de Griffith [24] bien que le taux de restitution d'énergie correspondant à un chargement unitaire soit infini. Mais comme la propagation s'effectue sous un chargement infinitésimal, le taux de restitution d'énergie réel est fini. La relation (2.58) montre que plus la singularité est forte (α petit), plus l'ordre de grandeur de la vitesse de croissance du défaut est grand. À singularité égale, la fissure croîtra plus vite au voisinage des points présentant le plus grand rapport entre le facteur d'intensité de la singularité (le coefficient K) et la ténacité (κ). Notons que si (2.58) nous fournit l'évolution de la taille du défaut, nous ne savons rien quant à sa forme. Il faudrait envisager toutes les formes et retenir celle qui conduit, à longueur égale, à la plus grande restitution d'énergie élastique, *i.e.* celle donnant le plus grand facteur d'intensité de la singularité K.
- ⋆ Notons aussi que ces propriétés, établies dans un cadre bi-dimensionnel, sont conformes aux solutions exactes des problèmes uni- ou tri-dimensionnels traités dans la section précédente. Dans les trois exemples le champ $u(\emptyset)$ des déplacements à l'équilibre du milieu sain est non singulier et comme il existe des états de fissuration sans énergie élastique on est dans la situation (iv) avec $t_e < \infty$. La première fissuration est brutale — et il s'avère même qu'elle conduit immédiatement à la rupture.

Après avoir étudier l'influence des singularités sur l'apparition de la fissuration, essayons d'analyser leur influence sur la rupture en se plaçant maintenant dans la situation extrême où seul un petit ligament empêche que le milieu ne soit séparé en deux (ou plusieurs) morceaux. On adopte pour cela l'hypothèse suivante :

Hypothèse. *Le milieu est bidimensionnel, linéairement élastique, soumis à un chargement linéaire croissant et atteignant, à un instant t_r, un état de fissuration Γ_r, de longueur ℓ_r qui débouche en un point non anguleux x_r de la surface libre $\partial_F\Omega$. Au voisinage de x_r, Γ_r est une courbe régulière dont la tangente en x_r ne coïncide pas avec la normale à $\partial_F\Omega$ et le milieu est supposé avoir une ténacité constante, $k(x,n) = \kappa$. Le champ des déplacements u_r du milieu à l'équilibre, sous le chargement unitaire U_0, dans l' état de fissuration Γ_r est supposé discontinu en x_r. On dénote, pour h voisin de* 0, *par Γ_h le ligament de longueur h,* i.e. *la partie de Γ_r de longueur h située au voisinage de x_r.*

FIGURE 2.7 – *État de fissuration avec petit ligament.*

La question que l'on se pose est de savoir si un ligament peut se rompre progressivement ou au contraire s'il se rompt toujours brutalement. Autrement dit, avec les notations adoptées jusqu'ici, a-t-on $\Gamma^-(t_r) = \Gamma_r$? La réponse passe par l'évaluation de la restitution d'énergie élastique provoquée par la rupture du ligament. Cette estimation a également été faite par D. LEGUILLON dans [34] et fait l'objet de la Proposition suivante.

24. Le lecteur scrupuleux aura noté que (2.58) peut se déduire aussi du critère de Griffith

Proposition 20 (D. Leguillon, [34]). *Soit Γ_h le ligament de Γ_r de longueur h, supposée petite, placé au voisinage du point x_r. Alors l'énergie élastique associé à l'état de fissuration $\Gamma_r \backslash \Gamma_h$ est donnée par :*

$$E_d(\Gamma_r \backslash \Gamma_h, U_0) = E_d(\Gamma_r, U_0) - \frac{K}{\ln h} + o(1/\ln h), \qquad K > 0. \tag{2.59}$$

Ce résultat est établi dans [34] en utilisant, comme précédemment, la méthode des développements asymptotiques raccordés. Les spécialistes auront reconnu dans la singularité logarithmique le comportement à l'infini, en élasticité plane, du champ de déplacement résultant d'une force concentrée, cf. [41]. Ici, ce sont les contraintes chargées de maintenir la cohésion du ligament qui apparaissent, à longue distance du ligament, comme une force concentrée. Le coefficient K est strictement positif, dès lors que le champ u_r — qui est donc le champ de déplacement du milieu à l'équilibre après rupture du ligament — est supposé discontinu en x_r. Il relie en fait la force concentrée en x_r au saut de u_r en x_r. À l'aide de cette estimation, il n'est pas difficile de conclure.

Proposition 21. *Sous les hypothèses précédentes, la rupture du ligament est brutale : $\Gamma^-(t_r) \neq \Gamma^+(t_r) = \Gamma_r$.*

Preuve. On est dans les conditions de la sous-section précédente. Posons $\ell = \ell_r - h$ et $\Gamma_\ell = \Gamma_r \backslash \Gamma_h$. Comme $F(\ell) = E_d(\Gamma_r, U_0) - K/\log(\ell_r - \ell) + o(1/\ln(\ell_r - \ell))$ et que $H(\ell) = \kappa\ell$, il suffit de remarquer que la fonction F est concave pour ℓ assez proche de ℓ_r et d'utiliser les résultats de la sous-section précédente pour en déduire que l'on ne peut avoir une croissance continue de $\ell(t)$ jusqu'à ℓ_r, autrement dit que la rupture du ligament est nécessairement brutale. □

⋆ Remarque. En combinant les résultats relatifs à l'initiation de la fissuration et à la rupture, on voit que, si l'on part d'une structure saine dont le champ des déplacements élastiques ne présente pas de singularité forte, la première fissuration *et* la rupture seront brutales. Ceci suffit à prouver que ces propagations brutales ne sont pas exceptionnelles. C'est évidemment le cas pour les trois problèmes traités explicitement puisque la rupture coïncidait avec l'initiation.

2.5 Perspectives et Conclusion

2.5.1 Les défauts à corriger

Nous signalions dans l'introduction que notre formulation ne fonctionnait actuellement que dans le cadre restreint de déplacements imposés. Il est temps d'analyser pourquoi son extension directe à un cadre plus général de chargements incluant la possibilité d'imposer des forces (volumiques ou surfaciques) non nulles échouerait.

Supposons que les forces imposées soient caractérisées par leur travail $f(v)$ dans tout déplacement admissible v. L'idée naturelle est de remplacer alors dans notre formulation l'énergie élastique par l'énergie potentielle, autrement dit de lui retrancher le travail $f(u)$ des forces imposées dans le déplacement à l'équilibre. Malheureusement, pour certaines valeurs de f et de l'état de fissuration Γ, l'équilibre peut s'avérer impossible, ce qui se traduit par une énergie potentielle "valant" $-\infty$. Mais

alors, suivant notre principe de moindre énergie, la structure devrait choisir de tels états de fissuration et ne pourraient donc équilibrer les forces imposées. Comme, le plus souvent, dès que f est non nul, on peut trouver de tels états de fissuration — il suffit de couper la structure de façon à ce qu'un de ses morceaux ne puisse plus être en équilibre —, la moindre force provoquerait la rupture du milieu, ce qui est manifestement contraire à l'expérience.

Pour illustrer ces propos généraux, reconsidérons le cas d'un milieu unidimensionnel $\Omega = (0, L)$, homogène, dont l'extrémité $x = 0$ est attachée, son extrémité $x = L$ est soumise à une force de traction d'intensité croissante t prise comme paramètre de temps et qui n'est pas soumis à des forces linéiques. On a donc ici $f(v) = tv(L)$. Envisageons un état de fissuration $\Gamma = \{x_1\}$ correspondant en une rupture du milieu en un point $x_1 \in (0, L)$. L'ensemble des champs de déplacements admissibles est alors — en prenant des conditions de contact unilatérales :

$$\mathcal{C}(\Gamma, t) = \{v \in H^1((0, x_1) \cup (x_1, L)) \mid v(0) = 0, [\![v]\!](x_1) \geq 0\}.$$

L'énergie potentielle $E_p(\Gamma, t)$ étant définie par

$$E_p(\Gamma, t) = \inf_{v \in \mathcal{C}(\Gamma,t)} \left\{ \int_0^{x_1} \frac{E}{2} v'(x)^2 \, dx + \int_{x_1}^{L} \frac{E}{2} v'(x)^2 \, dx - tv(L) \right\},$$

il n'est pas difficile de voir, en considérant la suite v_n de déplacements admissibles suivante

$$v_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < x_1 \\ n & si\ x_1 < x \leq L \end{cases},$$

que $E_p(\Gamma, t) = -\infty$ dès lors que $t > 0$. Cela tient évidemment au fait que le morceau (x_1, L) ne peut plus être en équilibre. Comme en contrepartie cette fracture ne coûte que l'énergie de surface k, le milieu aurait intérêt à casser dès la mise en traction. Le lecteur est invité à faire le même raisonnement dans le cas de forces linéiques imposées — pesanteur par exemple —, la conclusion est identique (si le milieu est en tension).

En admettant — mais il n'est pas difficile de s'en convaincre — que ce phénomène persiste en dimension quelconque, notre formulation souffre d'un mal sérieux que l'on ne saurait passer sous silence et une question essentielle se pose : Peut-on adapter ou "assouplir" notre formulation pour pouvoir traiter n'importe quel type de chargement ? Voici quelques remèdes possibles :

- *Ne pas imposer l'intensité des forces.* Considérons le cas de forces surfaciques sur $\partial\Omega$ que l'on se donne à un facteur multiplicatif près : $F(x, t) = \lambda(t)F_0(x)$, F_0 étant donné mais pas $\lambda(t)$. Cela revient à se donner la répartition relative des forces, mais pas leur intensité. En contrepartie donnons-nous la valeur du travail de F_0, par exemple $\int_{\partial\Omega} F_0(x) \cdot v(x) \, dH^{N-1}(x) = t$, relation qui devient alors une condition d'admissibilité des déplacements. L'équilibre est alors toujours possible, quel que soit l'état de fissuration du milieu : le déplacement à l'équilibre est celui, parmi les champs admissibles, qui minimise l'énergie élastique du milieu fissuré. Si le milieu se casse en plusieurs morceaux à partir d'un instant t_r, on trouvera simplement $\lambda(t) = 0$ pour $t > t_r$, ce qui revient à "relâcher" les forces après rupture. Notre formulation peut parfaitement fonctionner dans ce cadre. Mais il peut paraître encore trop restrictif.
- *Remplacer les minima absolus par des minima relatifs.* L'hypothèse (trop ?) forte que nous avons adoptée consiste à décréter que le milieu ira chercher le ou les états de fissuration conduisant

au niveau d'énergie le plus bas du milieu, et ce même si cet état est "fort éloigné" des états de fissuration antérieurs. Bon nombre de résultats — bons et mauvais — que nous avons obtenus ne valent que sous cette condition : ainsi, c'est parce qu'on autorise des fissurations brutales que l'on arrive à rendre compte de l'apparition de la fissuration dans un milieu sain sans singularité forte. Une hypothèse moindre consisterait à autoriser les états de fissuration correspondant seulement à des minima "locaux" de l'énergie du milieu, ce qui nécessiterait une définition préalable précise de cette notion de voisinage d'état de fissuration. Le risque est alors de trouver "trop" de solutions : en l'absence de singularité forte, le milieu sain pourrait s'avérer stable — *i.e.* correspondant à un minimum local — et l'on ne saurait toujours pas rendre compte de l'amorçage.

– *Introduire de la dynamique.* Le deuxième pilier de notre formulation — mais qui va de pair avec le précédent — est le cadre très élargi dans lequel on cherche les évolutions de la fissuration. On peut nous rétorquer qu'envisager des propagations brutales de la fissuration tout en restant en quasi-statique est un non-sens et qu'il faut nécessairement passer par une formulation dynamique. Peut-être, mais laquelle ? Cela résoudra-t-il la question de l'amorçage pour autant ?
– *Changer la forme de l'énergie.* Notre troisième grande hypothèse concerne le choix des énergies : énergie purement élastique pour le matériau, énergie de surface proportionnelle à leur aire pour les fissures. Il est toujours possible d'en envisager d'autres et d'introduire des comportements inélastiques pour le matériau ou de prendre des formes d'énergie de surface faisant intervenir la valeur du saut des déplacements. Notre formulation — du moins celle en temps discret — le permet et certains résultats s'en trouveront changés. Encore faut-il que ces choix aient une base physique claire ?

2.5.2 Les développements envisagés

Même si l'on conserve la formulation sous sa forme actuelle, plusieurs développements sont souhaitables. Les premiers concernent son étude mathématique sérieuse — par opposition à ce qui est fait ici —, les deuxièmes son traitement numérique et enfin les troisièmes son application à l'étude de divers problèmes de fissuration.

– *Le bon cadre mathématique.* Le lecteur très à cheval sur les questions d'existence et le sens mathématique des objets manipulés et des problèmes traités n'aura pas manqué de noter les faiblesses de ce texte à maintes reprises. On a en particulier parlé de régularité spatiale des fissures de façon à pouvoir utiliser les résultats classiques de l'élasticité linéaire. Cette notion de régularité demanderait évidemment à être précisée. De même, il est tout à fait légitime de se demander si les problèmes d'évolution introduits — que ce soit celui en temps discret ou celui en temps continu — possèdent des solutions — au moins une, mais pas trop — et dans quel cadre. Les exemples traités dans la section 2.3 nous font espérer que ces problèmes sont "bien posés" et que l'issue devrait être favorable une fois que le bon cadre fonctionnel relatif à la régularité aura été trouvé. Notre problème ressemble à un problème rencontré en segmentation d'images, cf. [40], et de nombreux résultats existent dans la littérature dans ce contexte, cf. par exemple [14] ou [3]. Ils ne sont malheureusement pas transposables directement à nos problèmes de rupture parce qu'ils sont établis dans un cadre scalaire et non vectoriel, que l'irréversibilité de la fissuration (ou des surfaces de discontinuités) n'y est pas prise en compte et que la fissuration au bord n'y est pas envisagée. Dans le cadre qui nous intéresse, on peut trouver quelques éléments de réponse et des premiers résultats dans [20]. Mais beaucoup reste à faire.

- *Le numérique.* En dehors de quelques cas très particuliers tels que ceux traités dans la section 2.3, on ne pourra espérer résoudre exactement le problème d'évolution et le recours à des méthodes numériques d'approximation s'avérera nécessaire. Le numéricien aura tout de suite noté que l'on rencontrera des difficultés sérieuses si l'on essaie de traiter directement le problème sous sa forme actuelle du fait de la discontinuité des déplacements sur des surfaces inconnues et *a priori* arbitraires. En adoptant la démarche suivie en segmentation d'image, cf. [4], l'idée consiste à régulariser la fonctionnelle en remplaçant les fissures par des zones endommagées de façon à pouvoir travailler avec des champs continus. La mise en œuvre de cette méthode d'approximation est en cours, sa présentation et les premiers résultats numériques obtenus feront l'objet d'une prochaine publication.
- *Les applications.* Comme applications possibles de notre formulation de la rupture nous voyons en particulier les suivantes :
  1. *Le critère de bifurcation.* Comme nous n'imposons aucune restriction quant au trajet spatial des fissures, il se pourra que notre formulation prédise dans certains cas un trajet non régulier avec discontinuité de la tangente. Il sera alors bon de comparer nos résultats avec ceux prédits par les différents critères de bifurcation introduits dans la littérature.
  2. *Décohésion et délaminage.* Les phénomènes de décohésion et de délaminage dans les composites (fragiles) peuvent être traités avec notre formulation sans lui apporter la moindre modification, mais en particularisant simplement la répartition de la ténacité dans le milieu, *i.e.* la fonction $(x, n) \mapsto k(x, n)$. Ainsi par exemple, si l'on considère que les interfaces I sont beaucoup plus fragiles que les matériaux, on posera

     $$k(x,n) = \begin{cases} k_0, & si\ x \in I \\ \infty, & si\ x \in \bar{\Omega} \backslash I \end{cases},$$

     et le problème se ramènera à chercher les parties de I où la décohésion aura lieu en suivant notre principe de moindre énergie.
  3. *Rupture et endommagement.* En appliquant notre loi de fissuration à un milieu composite fragile, il se pourra qu'une phase de l'évolution de la fissuration correspondra à un réseau de "microfissures" de tailles comparables avec celle de la microstructure et on pourra parler alors d'endommagement. Autrement dit, en partant d'un modèle de rupture on aboutirait à un modèle d'endommagement, ce qui constituerait un joli contre-pied à la démarche traditionnelle.

2.5.3 Conclusion

La formulation proposée, bien qu'elle présente de nombreux avantages, comporte (au moins) un défaut trop important pour pouvoir prétendre supplanter d'ores et déjà la théorie de Griffith. Nous espérons au moins que notre tentative aura montré que la théorie en vigueur ne peut être conservée en l'état et qu'on peut s'y attaquer tout en restant dans le cadre de la Mécanique de la Rupture Fragile. Si en plus elle pouvait servir de point de départ à une théorie plus élaborée, nous serions comblés.

Chapitre 3

Amorçage de la décohésion dans l'essai d'arrachement.

Résumé.

En revisitant la formulation classique de la mécanique de la rupture, l'étude de la décohésion dans les matériaux composites est modélisée par un principe de moindre énergie. Nous nous intéressons à l'essai d'arrachement. En considérant une poutre cylindrique armée, caractérisée par ϵ rapport de son rayon sur sa longueur, une étude énergétique, tenant compte des effets de bords à l'interface, montre que la décohésion s'initie brutalement sur une longueur d'ordre $\sqrt{\epsilon}$.

3.1 Application de la théorie de Griffith étendue à la décohésion.

La théorie classique de la mécanique de la rupture fragile, basée sur le critère de Griffith et la notion de taux de restitution d'énergie critique, est inapte à prédire elle seule tant l'initiation que l'évolution spatio-temporelle arbitraire de la fissuration. Tout en restant dans le cadre des milieux élastiques, G.A. Francfort et J.-J. Marigo (cf. [22]) proposent une nouvelle formulation, qui, dans le but de combler ces lacunes, se doit de s'affranchir des hypothèses classiques d'existence d'une fissure initiale et de propagation suivant des trajets prédéfinis. Ainsi, renonçant (partiellement) au critère de Griffith, cette formulation reprend en fait la notion originale d'énergie de surface associée à un état fissuré. Contrairement au cadre classique de la rupture, les auteurs envisagent ici des fissures en nombre et de formes arbitraires, et proposent de chercher, à un niveau de chargement U donné et parmi tous les états de fissuration possibles, celui ayant la moindre énergie, l'énergie d'un milieu dans un état de fissuration donné incluant son énergie de surface et son énergie élastique à l'équilibre, respectivement :

$$E_s(\Gamma) = \int_\Gamma k(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \quad \text{et} \quad E_d(\Gamma, U) = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{C}(\Gamma,U)} \int_{\Omega\setminus\Gamma} \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\epsilon(\mathbf{v})(x)\epsilon(\mathbf{v})(x)\, dx$$

La fonction $k(x)$ représente la *ténacité* au point x, et $\mathcal{C}(\Gamma, U)$ désigne l'espace des déplacements admissibles de la structure Ω Γ-fissurée. Grâce à cette nouvelle formulation, des propriétés générales de l'évolution de la fissuration ont pu être établies, précisément là où la théorie classique n'apportait aucune solution : initiation de fissure(s), suivi des propagations stables et instables, rôle des singularités dans le caractère progressif ou brutal de cette évolution, fissuration jusqu'à rupture,... Le lecteur se référera à [22] pour une description détaillée du modèle présenté.

Un autre intérêt majeur que présente le modèle est de pouvoir traiter les phénomènes de décohésion ou de délaminage dans les composites. Il suffit en fait de particulariser la répartition de la ténacité $k(x)$ dans le milieu. En particulier, si on veut se restreindre à l'étude des fissures localisées aux interfaces I, en supposant que celles-ci sont beaucoup plus fragiles que les matériaux utilisés, il suffit de poser $k(x) = k_0$ pour $x \in I$ et $k(x) = \infty$ pour $x \in \bar{\Omega}\setminus I$, la formulation du problème demeure inchangée, la décohésion des interfaces évoluant de façon à minimiser l'énergie. On l'illustre dans la suite de la Note sur le problème modèle de l'essai d'arrachement d'une armature dans une poutre.

3.2 L'essai d'arrachement.

On considère une poutre droite de longueur L, de section circulaire de rayon R contenant une armature centrée de rayon R_f. On utilise un système de coordonnées cylindriques sans dimension (r, θ, z) relié au système habituel $(\bar{r}, \theta, \bar{z})$ par $r = \bar{r}/R$, $z = \bar{z}/L$. On note alors S et $\Omega = S \times (0, 1)$ la section et le domaine de référence, S_f et $V_f = R_f^2/R^2$ la section et la fraction volumique de l'armature, S_m et V_m celles de la matrice. Fibre et matrice sont linéairement élastiques, homogènes, isotropes, de modules d'Young respectifs E_f et E_m. Elles sont *en contact parfait* avant chargement. On suppose en outre que leurs coefficients de Poisson sont égaux ($\nu_f = \nu_m$), ce pour simplifier les calculs et les expressions.

La poutre est encastrée sur sa section $S\times\{1\}$, tandis que l'on tire sur l'extrémité $S_f\times\{0\}$ de la fibre en lui imposant un déplacement longitudinal $-tL$, t croissant depuis 0 jouant le rôle de paramètre

de chargement. Les forces volumiques sont nulles, la surface latérale et l'extrémité $S_m \times \{0\}$ de la matrice sont libres. Du fait de l'axisymétrie du problème, la décohésion de l'interface est repérée par la fonction caractéristique χ, définie sur $[0,1]$, prenant la valeur 0 pour les valeurs z de la cote des sections où l'adhésion fibre-matrice reste parfaite et 1 sinon. On suppose en outre qu'aux endroits où il y a décohésion, fibre et matrice ne sont plus en contact.

Le rapport $\epsilon = R_m/L$, inverse de l'élancement, étant considéré comme un petit paramètre, l'objectif est de construire une solution approchée du problème de décohésion *via* des méthodes asymptotiques. Moyennant une adimensionnalisation des déplacements, l'énergie de la poutre dans un état de fissuration caractérisée par χ et soumise au chargement t s'écrit

$$\mathcal{E} = 2\pi R^2 L\big(t^2 W_\epsilon(\chi) + \kappa\ell(\chi)\big) \tag{3.1}$$

où κ est une quantité caractéristique de la structure, $\ell(\chi)$ (proportionnel à la longueur d'interface décollée) est l'énergie de surface adimensionnalisée et $W_\epsilon(\chi)$ est l'énergie élastique adimensionnalisée. De façon explicite,

$$\kappa = \frac{k_0 R_f}{R^2}, \qquad \ell(\chi) = \int_0^1 \chi(z)\, dz, \qquad W_\epsilon(\chi) = \min_{\mathbf{v}\in\mathcal{C}(\chi)} \left\{ \frac{1}{\epsilon^4}\, a_T(\chi;\mathbf{v}) + \frac{2}{\epsilon^2}\, a_C(\chi;\mathbf{v}) + a_L(\chi;\mathbf{v}) \right\}, \tag{3.2}$$

où $a_T(\chi;\mathbf{v})$, $a_C(\chi;\mathbf{v})$, $a_L(\chi;\mathbf{v})$ sont respectivement les énergies de déformation transversale, de couplage et de distorsion, et de déformation longitudinale, *i.e.* en notant $\Omega_\chi = \Omega\backslash\{x = (r,\theta,z) \in I/\chi(z) = 1\}$:

$$a_T(\chi;\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_\chi} \big\{(\lambda+2\mu)\left(\varepsilon_{rr}^2(\mathbf{v}) + \varepsilon_{\theta\theta}^2(\mathbf{v})\right) + 2\,\lambda\,\varepsilon_{rr}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{\theta\theta}(\mathbf{v})\big\}\, dx$$

$$a_C(\chi;\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_\chi} \big\{\lambda\,\varepsilon_{rr}(\mathbf{v})\,\varepsilon_{zz}(\mathbf{v}) + 2\mu\,\varepsilon_{rz}^2(\mathbf{v})\big\}\, dx \quad ; \quad a_L(\chi;\mathbf{v}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_\chi} (\lambda+2\mu)\,\varepsilon_{zz}^2(\mathbf{v})\, dx.$$

Le problème d'évolution de la décohésion consiste alors à trouver, à chaque "instant" t, la fonction $\chi^\epsilon(t)$ minimisant $t^2 W_\epsilon(\chi) + \kappa\ell(\chi)$. La principale difficulté tient évidemment en l'estimation de l'énergie élastique.

3.2.1 L'approximation poutre 1D

En négligeant dans un premier temps *les couches limites*, la méthode asymptotique fournit comme première approximation de l'énergie élastique celle correspondant à la théorie unidimensionnelle classique des poutres, à savoir

$$W_\epsilon(\chi) \simeq W_0(\chi) = \min_{(v_f,v_m)\in\mathcal{C}_0(\chi)} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(E_f V_f\, v_f'(z)^2 + E_m V_m\, v_m'(z)^2\right) dz \right\} \tag{3.3}$$

avec $\mathcal{C}_0(\chi) = \big\{(v_f, v_m) \in H^1(0,1)^2 \ / \ v_f(1) = v_m(1) = 0\ ,\ v_f(0) = -1\ ,\ (1-\chi)(v_f - v_m) = 0\big\}$. Le problème de minimisation en χ se résout alors simplement et l'optimum, noté $\chi^0(t)$, est donné par :

$$\chi^0(t) = 0 \ si\ t \le t_e^0, \quad \chi^0(t)(z) = \begin{cases} 1 \ si\ 0 < z < \ell(t) \\ 0 \ si\ \ell(t) < z < 1 \end{cases} \ si\ t_e^0 < t < t_r^0, \quad \chi^0(t) = 1 \ si\ t \ge t_r^0, \tag{3.4}$$

$$t_e^0 = \sqrt{\frac{2\kappa E_f V_f}{E_m V_m (E_f V_f + E_m V_m)}}, \qquad t_r^0 = \sqrt{\frac{2\kappa (E_f V_f + E_m V_m)}{E_m V_m E_f V_f}}, \qquad \ell(t) = \frac{t - t_e^0}{t_r^0 - t_e^0}. \tag{3.5}$$

Autrement dit, la décohésion s'initie à l'extrémité où l'on tire à l'"instant" t_e^0, puis se propage progressivement jusqu'à l'autre extrémité qu'elle atteint à l'"instant" t_r^0.

3.2.2 Amorçage et couches limites.

L'approximation précédente, qui fournit une évolution régulière de la décohésion depuis l'extrémité, est en fait non conforme aux résultats obtenus par G.A. Francfort et J.-J. Marigo en ce qui concerne l'amorçage. En effet, il est montré dans [22] que, du fait de l'absence de singularité forte dans la solution du problème élastique posé sur la poutre saine, l'amorçage de la décohésion est nécessairement brutal, une fissure de longueur finie ℓ_e^ϵ devant apparaître à un instant fini t_e^ϵ. La contradiction tient à l'approximation faite qui ne tient pas compte des couches limites. Il faut donc affiner l'approximation de l'énergie élastique. Toutefois l'analyse précédente suggère de n'envisager que des décohésions progressant depuis l'extrémité. En notant χ_ℓ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, \ell]$, $0 \leq \ell \leq 1$, il s'agit donc de minimiser, à chaque instant t, $t^2 W_\epsilon(\chi_\ell) + \kappa\ell$. Le résultat dépend de façon essentielle de la convexité de $\bar{W}_\epsilon : \ell \mapsto W_\epsilon(\chi_\ell)$. Or, l'absence de singularité forte quand $\ell = 0$ fait que $\bar{W}_\epsilon'(0) = 0$, et, comme $\bar{W}_\epsilon$ est décroissante, elle est nécessairement concave au voisinage de $\ell = 0$. En conséquence, en s'appuyant sur la convexifiée $\bar{W}_\epsilon^{**}$ de $\bar{W}_\epsilon$, il est facile de montrer que ℓ_e^ϵ et t_e^ϵ vérifient :

$$t_e^{\epsilon 2} \bar{W}_\epsilon'(\ell_e^\epsilon) + \kappa = 0, \qquad \bar{W}_\epsilon(\ell_e^\epsilon) - \bar{W}_\epsilon(0) = \ell_e^\epsilon \bar{W}_\epsilon'(\ell_e^\epsilon), \tag{3.6}$$

la première relation correspondant au critère de Griffith, la seconde se déduisant de la condition de saut lors d'une fissuration brutale, cf. [22]. Pour tirer de (3.6_2) une approximation non triviale de ℓ_e^ϵ, il faut obtenir une estimation plus fine de $\bar{W}_\epsilon(\ell)$ pour des ℓ petits. C'est là qu'intervient la prise en compte des couches limites. En utilisant la méthode des développements asymptotiques raccordés et en s'appuyant sur [33] et [1], on obtient les approximations suivantes de l'énergie élastique suivant l'ordre de grandeur de la longueur décollée :

$$Si\ \ell \ll \epsilon \quad : \quad \bar{W}_\epsilon(\ell) = \bar{W}_0(0)(1 - \epsilon K_0 - C\ell^{2\alpha} + \cdots) \tag{3.7}$$

$$Si\ \ell \sim \epsilon \quad : \quad \bar{W}_\epsilon(\ell) = \bar{W}_0(0)(1 - \epsilon K(\frac{\ell}{\epsilon}) + \cdots) \tag{3.8}$$

$$Si\ \ell \gg \epsilon \quad : \quad \bar{W}_\epsilon(\ell) = \bar{W}_0(\ell)(1 - \epsilon K_\infty + \cdots) \tag{3.9}$$

où K_0 et K_∞ sont des constantes, alors que $K(\lambda)$ est une fonction croissante de λ telle que

$$\lim_{\lambda \to 0} K(\lambda) = K_0, \qquad K(\lambda) = \lambda \frac{E_m V_m}{E_f V_f} + K_\infty + o(1) \quad \text{lorsque} \quad \lambda \to \infty, \tag{3.10}$$

et que $\bar{W}_0(\ell) \equiv W_0(\chi_\ell)$ se calcule facilement à partir de (3.3) :

$$2\bar{W}_0(\ell) = \frac{(E_f V_f + E_m V_m) E_f V_f}{E_f V_f + \ell E_m V_m} \tag{3.11}$$

Le terme en K_0 dans (3.7) traduit la couche limite en $S \times \{0\}$ pour une poutre 3D saine, couche limite qui est due au fait que dans l'approximation poutre 1D la contrainte σ_{zz} ne vérifie pas la

condition de bord libre sur $S_m \times \{0\}$. Le terme en $\ell^{2\alpha}$ provient de la singularité en $r = R_f/R$, $z = 0$ des contraintes dans le problème d'élasticité 3D pour la poutre saine, cf. [33]. Comme cette singularité est faible, $\alpha > 1/2$, $\bar{W}_\epsilon$ est concave au voisinage de 0. Le terme en K_∞ dans (3.9) traduit la couche limite en $S \times \{\ell\}$ pour une poutre décollée sur une longueur finie ℓ, $0 < \ell < 1$, couche limite qui est due au fait que dans l'approximation poutre la contrainte σ_{zz} dans la matrice n'est pas continue en $z = \ell$. Il s'avère que cette couche limite est indépendante de ℓ. Il s'avère aussi qu'il n'y a plus dans ce cas de couche limite en $z = 0$, d'où l'absence du terme en K_0 dans (3.9). Enfin, lorsque la décohésion a lieu sur une longueur de l'ordre de grandeur du rayon de la poutre, il y a une couche limite au voisinage de $z = 0$ englobant la zone décollée, toujours en raison du non respect de la condition de bord libre sur $S_m \times \{0\}$ par l'approximation poutre. Le vrai champ 3D devant en plus vérifier la condition de bord libre sur les lèvres décollées, le correcteur de couche limite dépend de la longueur décollée, d'où la présence de la fonction $K(\lambda)$ dans (3.8).

Comme $\bar{W}_0$ est convexe et que $\bar{W}_\epsilon$ est concave au voisinage de 0, on déduit de (3.6_2) que ℓ_e^ϵ est nécessairement petit devant 1 et d'un ordre au moins égal à ϵ. Son ordre de grandeur dépend en fait de la convexité de la fonction K. Envisageons deux cas.

1. **K est convexe.** La convexité de K interdit alors toute solution d'ordre ϵ à (3.6_2). De ce fait, en utilisant (3.9) et en développant (3.6_2), on montre facilement que ℓ_e^ϵ est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$:

$$\ell_e^{\epsilon\,2} \approx 2\epsilon(K_0 - K_\infty)\left(\frac{E_f V_f}{E_m V_m}\right)^2. \tag{3.12}$$

   Il est à noter que cette valeur est indépendante de la ténacité k_0 de l'interface et ne dépend que des rapports des modules d'Young, de la fraction volumique de l'armature et du coefficient de Poisson. En injectant ce résultat dans (3.6_1) on en déduit que l'instant d'amorçage t_e^ϵ vaut approximativement $\sqrt{-\kappa/\bar{W}_0'(0)}$ — lui dépend bien de la ténacité k_0 de l'interface — qui correspond exactement à la valeur t_e^0 fournie par l'approximation 1D. Après cet amorçage brutal, la décohésion progresse approximativement comme le prévoit l'approche 1D.

2. **K est convexe puis concave, $\mathbf{K_\infty > K_0}$.** Si $K'' > 0$ dans un voisinage de 0, négative après et si $K_\infty > K_0$, on montre que (3.6_2) possède une unique solution et qu'elle est d'ordre ϵ. D'où :

$$\ell_e^\epsilon \approx \epsilon \ell_e \qquad avec \qquad K(\ell_e) - K_0 = \ell_e K'(\ell_e). \tag{3.13}$$

   Ici aussi, la longueur d'amorçage est indépendante de la ténacité k_0 de l'interface. En reportant dans (3.6_1) on en déduit que l'instant d'amorçage t_e^ϵ vaut approximativement $t_e = \sqrt{\kappa/K'(\ell_e)}$ et est donc inférieur à l'instant d'amorçage t_e^0 prévu par l'approche 1D. En résolvant le problème d'évolution, on montre en fait que, après son amorçage brutal à l'instant t_e, la décohésion croît lentement en restant de l'ordre de ϵ jusqu'à l'instant t_e^0, après quoi elle devient d'ordre 1 (macroscopique diraient certains) et progresse comme le prévoit l'approche 1D.

3.2.3 Détermination de la longueur d'amorçage.

En pratique, la détermination de $K(\lambda)$, et donc la distinction des différents cas, ne peut se faire que numériquement. Il s'agit de résoudre un problème d'élasticité posé sur une bande semi-infinie correspondant à un grossissement de la poutre au voisinage de la section $S \times \{0\}$. Les paramètres du problème sont, outre les coefficients d'élasticité des matériaux, la fraction volumique de l'armature

et la longueur λ de décohésion. Dans tous les cas étudiés, on a constaté numériquement que K était convexe et donc que la longueur d'amorçage est de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$, cf. (3.12). Sa détermination passe par le calcul des constantes K_0 et K_∞. Le tableau suivant donne quelques valeurs calculées de $l_e^\epsilon/\sqrt{\epsilon}$ pour différentes valeurs de la fraction volumique de renfort ($E_m/E_f = 0.1$), et différents rapports des modules d'Young E_m/E_f ($V_f = 0.25$), alors que $\nu_f = \nu_m = 0.2$.

$l_e^\epsilon/\sqrt{\epsilon}$	4.49	3.18	2.02	1.44	1.02	0.63	0.48	0.42
E_m/E_f	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5	0.8	1
$l_e^\epsilon/\sqrt{\epsilon}$	0.62	0.94	1.23	1.46	1.63	1.70	1.58	1.05
V_f	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81

Tableau 1. Valeurs de $l_e^\epsilon/\sqrt{\epsilon}$ en fonction de V_f et E_f/E_m.
Table 1. *Values of* $l_e^\epsilon/\sqrt{\epsilon}$ *versus* V_f *and* E_f/E_m.

3.3 Remarques finales

- Les résultats ont été obtenus sans tenir compte de l'effet de bord près de l'encastrement, mais il s'avère qu'il ne joue un rôle que dans la phase ultime de décohésion, *i.e.* quand ℓ est voisin de 1.
- Les résultats restent qualitativement identiques, mais les expressions se compliquent sensiblement lorsque l'on ne suppose plus que l'armature et la matrice ont le même coefficient de Poisson.
- Le lecteur n'aura pas manqué de noter que l'étude fine de l'amorçage de la décohésion exige de renoncer à la fois aux théories classiques de la rupture et des poutres.

Bibliographie

[1] **Abdelmoula R. and Marigo J.-J.**, 1991. Etude par la méthode des développements asymptotiques raccordés de l'assouplissement induit par une fissure dans une poutre en traction. *E.D.F. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Série C Mathématiques, Informatique, 4*, 45–80.

[2] L. Ambrosio, V.M. Tortorelli. On the approximation of free discontinuity problems. *Boll. Un. Mat. Ital.* ,**7**-6B, 1992, 105–123.

[3] Ambrosio, L. Existence theory for a new class of variational problems. *Arch. Rat. Mech. Anal. 111* (1990), 291–322.

[4] Ambrosio, L., and Tortorelli, V. M. Approximations of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence. *Comm. Pure Applied Math. XLIII* (1990), 999–1036.

[5] Amestoy, M. *Propagation de fissures en élasticité plane.* Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1987.

[6] Amestoy, M., and Leblond, J.-B. Crack paths in plane situation – II, Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *Int. J. Solids Structures 29*, 4 (1989), 465–501.

[7] V. Arnold. *Equations différentielles ordinaires*, Editions Mir, Moscou, 1974.

[8] G. Bellettini, A. Coscia. Discrete approximation of a free discontinuity problem. *Numer. Funct. Anal. Optim*, **15**, 1994, 105–123.

[9] **Bilteryst F.** , 2000. Une approche énergétique de la décohésion et de la micofissuration dans les composites. *Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris.*

[10] **Bilteryst F. and Marigo J.-J.**, 1999. Amorçage de la décohésion dans l'essai d'arrachement. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série II* **b**, 977–983.

[11] B. Bourdin. Une méthode variationnelle en mécanique de la rupture. Théorie et applications numériques. *Thèse de doctorat de l'Université Paris-Nord*, 1998, 178p.

[12] Bui, H. D. *Mécanique de la Rupture Fragile.* Masson, Paris, 1978.

[13] Ciarlet, P. G. *Elasticité tridimensionnelle*, vol. RMA 1 of *Collection Recherches en Mathématiques Appliquées.* Masson, Paris, 1986.

[14] De Giorgi, E., Carriero, M., and Leaci, A. Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rat. Mech. Anal. 108* (1989), 195–218.

[15] Destuynder, P., and Djaoua, M. Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de rice en théorie de la rupture fragile. *Math. Meth. Appl. Sci. 3* (1981), 70–87.

[16] Duvaut, G. *Mécanique des milieux continus.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1990.

[17] Duvaut, G., and Lions, J.-L. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris, 1972.

[18] Ehrlacher, A., and Fedelich, B. Stability and bifurcation of simple dissipative systems ; application to brutal damage. In *Cracking and Damage : Strain localization and size effect* (1989), J. Mazars and Z. P. Bazant, Eds., Elsevier Applied Science, pp. 217–227.

[19] Ekeland, I., and Temam, R. *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[20] Fonseca, I., and Francfort, G. A. Relaxation in BV versus quasiconvexification in $W^{1,p}$; a model for the interaction between fracture and damage. *Calculus of Variations 3* (1995), 407–446.

[21] G.A. Francfort, J.-J. Marigo. Stable damage evolution in a brittle continuous medium. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **12**-2, 1993, 149–189.

[22] G. A. Francfort, J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids, 46* **(8)**,1998, 1319–1342.

[23] G. A. Francfort, J.-J. Marigo. Une approche variationnelle de la mécanique du défaut. esaim *: Proceedings, Actes du* 30ème *Congrès d'Analyse Numérique* : CANum'98, vol.**3**,1998.

[24] Griffith, A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A* (1920), 163–198.

[25] Grisvard, P. *Elliptic problems in non smooth domains.* No. 24 in Monographs and Studies in Mathematics. Pitman, 1985.

[26] Grisvard, P. Problèmes aux limites dans les polygones ; mode d'emploi. *EDF, Bulletin de la Direction des Études et Recherches Série C*, 1 (1986), 21–59.

[27] Hashin, Z. Finite thermoelastic fracture criterion with application to laminate cracking analysis. *J. Mech. Phys. Solids 44*, 7 (1996), 1129–1145.

[28] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., and Lovíšek, J. *Solution of variational inequalities in mechanics*, vol. 66 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer Verlag, New York, 1988.

[29] Irwin, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech., Trans. ASME 24* (1957), 361–364.

[30] Irwin, G. R. Fracture. In *Handbuch der Physik*, vol. 6. Springer Verlag, 1958, pp. 551–590.

[31] R.J. Knops , E.W. Wilkes. Theory of elastic stability, in *Handbuch der Physik*, Ed. C. Truesdell,*Mechanics of solids III*, **VIa/3**, Springer Verlag, Berlin, 1973, 125–302.

[32] Leblond, J.-B. Crack paths in plane situation – I, General form of the expansion of the stress intensity factors. *Int. J. Solids Structures 25* (1989), 1311–1325.

[33] Leguillon, D. Calcul du taux de restitution d'énergie au voisinage d'une singularité. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II*, 309 (1989), 945–950.

[34] Leguillon, D. Comportement asymptotique du taux de restitution de l'énergie en fin de fracture. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II*, 310 (1990), 155–160.

[35] Leguillon, D. Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non-isotropic materials. *Eur. J. Mech., A/Solids 12*, 1 (1993), 33–51.

[36] Lemaître, J., and Chaboche, J.-L. *Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris, 1985.

[37] Liebowitz, H., Ed. Fracture *: An Advanced Treatise*, vol. II : Mathematical Fundamentals. Academic Press, New York, London, 1968.

[38] J.-J. Marigo. Constitutive relations in Plasticity, Damage and Fracture Mechanics based on a Work Property, *Nuclear Eng. Design*, **114**, 1989, 249-272.

[39] J. E. Marsden , T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, 1983.

[40] Munford, D., and Shah, J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Applied Math. XLII* (1989), 577–685.

[41] Muskhelishvili, N. I. *Some basic problems of mathematical theory of elasticity*, $2^n d$ ed. P. Noordhoff Ltd, Groningen, 1963.

[42] Nečas, J., and Hlaváček, I. *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies : An introduction.* Elsevier, Amsterdam, 1981.

[43] Nguyen, Q. S. Bifurcation and postbifurcation analysis in plasticity and brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids 35* (1987), 303–324.

[44] T.J. Richardson, S.K. Mitter. A variational formulation based edge focussing algorithm. *Sadhana Acad. P. Eng. S., 22*(**4**), 1997, 553–574.

[45] Rice, J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In Fracture *: An Advanced Treatise*, H. Liebowitz, Ed., vol. II : Mathematical Fundamentals. Academic Press, New York, London, 1968, ch. 3, pp. 191–311.

[46] Rice, J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech., Trans. ASME 35* (1968), 379–386.

[47] Sih, G. C., and Liebowitz, H. Mathematical theories of brittle fracture. In Fracture *: An Advanced Treatise*, H. Liebowitz, Ed., vol. II : Mathematical Fundamentals. Academic Press, New York, London, 1968, ch. 2, pp. 67–190.

[48] Stolz, C. On some aspects of stability and bifurcation in fracture and damage mechanics. In *Cracking and Damage : Strain localization and size effect* (1989), J. Mazars and Z. P. Bazant, Eds., Elsevier Applied Science, pp. 207–216.